第 4 章　不定积分

一、单元概述

研究物体的运动速度、曲线的切线和极值等问题产生了导数和微分,构成了微积分学的微分学;而它的逆运算,如由已知速度求路程函数,已知切线求曲线方程等问题,产生不定积分,构成微积分学的积分学.

本章将以实际问题为背景引出原函数和不定积分的概念,介绍不定积分的性质,计算方法及应用.

通过本章的学习,掌握不定积分的概念、性质、基本计算,为定积分的学习奠定重要的基础;通过运用变量替换和分部积分等积分方法,掌握应用数学知识解决涉及积分的实际问题的能力,培养学生抽象思维、逻辑推理等数学思维能力,培养学生应用数学知识、数学思想和数学工具分析和解决实际问题的能力.

二、教学重点与难点

1. 重点:原函数与不定积分的概念,换元积分法、分部积分法.

难点:原函数与导数的逆向运算关系,用凑微分法、分部积分法进行积分运算.

2. 解决方案:

原函数和不定积分的概念:从知识的实际背景引出概念和理论,用实例归纳数学知识.

不定积分的计算:采用练习教学法,精讲多练.

4.1　不定积分的概念与性质

本节主要介绍原函数和不定积分的概念.

【知识目标】

理解不定积分的概念和性质,运用基本积分公式求解不定积分.

【能力目标】

运用不定积分的性质求一些简单的不定积分;能用不定积分描述一些实际问题.

【案例引入】

引例 1(曲线方程)　从微分学的知识可知:若已知曲线方程 $y=f(x)$,则可求出该曲线在任一点处的切线的斜率 $k=f'(x)$. 例如,曲线 $y=x^2$ 在任意点处切线的斜率为 $k=2x$.

现在要解决其逆问题:已知曲线上的任意一点处的切线的斜率,求该曲线的方程.

引例 2(路程函数)　已知物体的运动方程为 $s(t)=t^2$,其速度 $v(t)=s'(t)=(t^2)'=2t$,这里速度 $v(t)=2t$ 是路程 $s(t)=t^2$ 的导数,反过来,若已知物体的运动速度 $v(t)$,如何求物体的运动方程 $s(t)$ 呢?

引例 3 (产品产量)　已知产品产量的变化率 $x'(t)$,求产量 $x(t)$ 的表达式.

在上面几个具体问题中,尽管实际背景不一样,但抽象的数量关系表示却是一样的,都可归结为:已知函数的导数,求函数的表达式. 例如,已知某一函数的导数是 $\cos x$,如何求原来的函数呢? 为此,引进原函数的概念.

【知识正文】

4.1.1　原函数的概念

定义 1　**设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数,若存在函数 $F(x)$,使得对任意 $x\in I$ 均有**

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例如,在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上,因为 $(\sin x)'=\cos x$,所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数;因为 $(x^2)'=2x$,所以 x^2 是 $2x$ 的一个原函数.

另外,由于 $(x^2+1)'=2x$,$(x^2+2)'=2x$,$\cdots$,$(x^2+C)'=2x$(C 是任意常数),所以 x^2+1,x^2+2,$\cdots$,x^2+C 都是 $2x$ 的原函数.

一般地,若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的原函数,则有

$$F'(x)=f(x),\quad [F(x)+C]'=f(x)\ (C \text{ 是任意常数}).$$

从而,$F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数. 因此,**一个函数的原函数不是唯一的.**

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数,则

$$[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

$$F(x)-G(x)=C\ (C \text{ 是任意常数}).$$

即一个函数的任意两个原函数之间只相差一个常数.

原函数的存在性将在下一章讨论,这里先介绍一个结论.

定理 1　**区间 I 上的连续函数一定有原函数.**

求函数 $f(x)$ 的原函数,实质上就是问它是由什么函数求导得来的,若求得 $f(x)$ 的一个原

函数 $F(x)$，其原函数的一般表达式即为 $F(x)+C$（C 是任意常数）.

4.1.2　不定积分的概念

定义 2　**设函数 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式 $F(x)+C$ 为函数 $f(x)$ 在该区间 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$. 即**

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

其中，$\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

由定义 2 可知，要求函数 $f(x)$ 的不定积分，只需求已知函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式，即先求出函数 $f(x)$ 的一个原函数，再加上一个任意常数 C.

例如，由于 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，因此 $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$. 又如，由于 x^2 是 $2x$ 的一个原函数，因此 $\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

例 1　求 $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　由于 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，因此 e^x 是 e^x 的一个原函数. 所以

$$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C.$$

例 2　求 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　由 3.2 节知 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$，所以

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$$

例 3　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)$ 与 $\int f'(x)\mathrm{d}x$ 是否一定相等？

解　不一定相等.

设 $F'(x)=f(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=(F(x)+C)'=F'(x)+0=f(x),$$

而由不定积分的定义得

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C\ (C\text{ 是任意常数}),$$

所以，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)$ 与 $\int f'(x)\mathrm{d}x$ 可能相差一个常数.

注：函数 $f(x)$ 的任意一个原函数 $y=F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的一条**积分曲线**，这条曲线上任意点 $(x,F(x))$ 处的切线斜率等于 $f(x)$，曲线 $y=F(x)$ 沿 y 轴方向平行移动时，就可以得

到 $y=F(x)+C$ 中任意条曲线的图形，因此不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义是**积分曲线簇**. 它的特点是：**在横坐标相同的点处，各积分曲线的切线的斜率都等于 $f(x)$，即各切线相互平行**. 如图 4-1 所示.

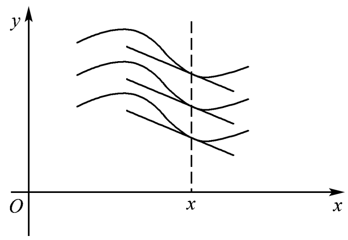

图 4-1

4.1.3　基本积分表

由不定积分的定义知，式 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C(x\in I)$ 与式 $F'(x)=f(x)(x\in I)$ 是等价的，因此从微分运算的基本公式立刻得到积分的运算公式，为了使用方便，对照列表如下：

导数公式	积分公式
1. $(x)'=1$	$\int \mathrm{d}x=x+C$
2. $\left(\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)'=x^{\mu}\ (\mu\neq-1)$	$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C\ (\mu\neq-1)$
3. $(\ln\lvert x\rvert)'=\dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$
4. $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)'=a^x$	$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln a}a^x+C$
5. $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$
6. $(\sin x)'=\cos x$	$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$
7. $(\cos x)'=-\sin x$	$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$
8. $(\tan x)'=\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$
9. $(\cot x)'=-\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$
10. $(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$
11. $(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

12. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$

13. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　$\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C$

4.1.4 不定积分的性质

根据不定积分的定义和导数运算法则,可以得到不定积分的如下性质.

性质 1 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$,

$$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C \text{ 或 } \int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$$

即不定积分与求导运算是互逆的运算. 二者要么抵消,要么相差一个常数.

事实上,若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数. 即

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则 $f(x)$ 在区间 I 内的不定积分为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

易见 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的原函数,因此性质 1 成立.

例 4 已知 $f(x)=\sqrt{x}$,求 $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x$.

解 由性质 1 可知,

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C=\sqrt{x}+C.$$

例 5 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数,求 $\displaystyle\int x^2 f(\ln x)\mathrm{d}x$.

解 由题意知

$$f(x)=(\mathrm{e}^{-x})'=-\mathrm{e}^{-x}$$

$$f(\ln x)=-\mathrm{e}^{-\ln x}=-\frac{1}{x},$$

所以

$$\int x^2 f(\ln x)\mathrm{d}x=\int x^2\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^2+C.$$

性质 2 设函数 $f(x)$ 的原函数存在,则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x\ (k\neq 0).$$

性质 3 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数存在,则

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x.$$

此性质可推广到有限多个函数之和的情形.

例 6　求 $\int(2x^3-1+\sin x)\,\mathrm{d}x$.

解　根据积分性质，并应用基本积分公式得

$$\int(2x^3-1+\sin x)\mathrm{d}x=2\int x^3\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^4-x-\cos x+C.$$

其中每一次的积分都有一个任意常数，但任意常数之和仍为任意常数，故只需在最后写一个任意常数 C.

例 7　求 $\int\frac{x^3-3x^2+2x+4}{x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3-3x^2+2x+4}{x^2}\mathrm{d}x&=\int\left(x-3+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int x\mathrm{d}x-3\int\mathrm{d}x+2\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+4\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2-3x+2\ln|x|-\frac{4}{x}+C.\end{aligned}$$

例 8　求 $\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　因为 $2^x\mathrm{e}^x=(2\mathrm{e})^x$，所以可把 2e 看成常数 a，利用 $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C$，有

$$\int 2^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(2\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=\frac{(2\mathrm{e})^x}{\ln(2\mathrm{e})}+C=\frac{2^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 2}+C.$$

例 9　求 $\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解　基本积分表中没有这种类型的积分，可以先把被积函数变形，化为表中所列类型的积分之后，再逐项求积分

$$\begin{aligned}\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x&=\int\frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\arctan x+\ln|x|+C.\end{aligned}$$

例 10　求 $\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　基本积分表中也没有这种类型的积分，被积函数经过变形，化为表中所列类型之后，就可以逐项求积分.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int x^2\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x+\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C.\end{aligned}$$

例 11 求 $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$.

解 先利用三角恒等关系式变形,然后再求积分.

$$\int \tan^2 x \mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int \sec^2 x \mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C.$$

例 12 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$.

解 先利用三角恒等式变形,然后再求积分.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}(1-\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\int \mathrm{d}x - \int \cos x \mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C. \end{aligned}$$

例 13 求 $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \mathrm{d}x$.

解 先利用三角恒等式变形,然后再求积分.

$$\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} \mathrm{d}x = 4\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -4\cot x + C.$$

例 14 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C.$

例 15 已知连续曲线上点 (x,y) 处的切线的斜率 $y' = 3x^2$,且过点 $(0,0)$,求此曲线方程.

解 曲线方程是其切线斜率的原函数,因而曲线方程为

$$y = \int y' \mathrm{d}x = \int 3x^2 \mathrm{d}x = x^3 + C.$$

又因为曲线过 $(0,0)$ 点,所以当 $x=0$ 时 $y=0$,可求得 $C=0$,故所求曲线方程为 $y=x^3$.

本例中的 $y' = 3x^2$ 实际上是一个简单的微分方程(含有未知函数、未知函数的导数及自变量的方程),其中用来确定常数的条件 $x(0)=0$ 称为边界条件或初始条件. 带有初始条件的微分方程称为初值问题.

例 16 已知某产品产量 $x(t)$ 的变化率为时间 t 的函数 $x'(t)=2t+1\ (t \geqslant 0)$,求产量函数 $x(t)$.

解 产品产量是其变化率的原函数,因而产量函数为

$$x(t) = \int x'(t)\mathrm{d}t = \int (2t+1)\mathrm{d}t = t^2 + t + C.$$

由于生产开始时的产量为零,即 $x(0)=0$. 将这个初始条件代入到 $x(t)$ 的表达式,得

$$0 = 0 + 0 + C.$$

从而

$$C=0,$$

于是所求产量函数为

$$x(t)=t^2+t.$$

例 17　已知某厂生产 x 吨某商品的边际成本为 $C'(x)=5+0.02x$(万元 / 吨)，又固定成本 $C_0=400$ 万元,求总成本函数 $C(x)$.

解　边际成本是总成本对产量的导数,说明总成本是边际成本的原函数,因而总成本函数为

$$\begin{aligned}C(x)&=\int C'(x)\mathrm{d}x=\int(5+0.02x)\,\mathrm{d}x\\&=5x+0.01x^2+C.\end{aligned}$$

由于固定成本 $C(0)=400$，将这个初始条件代入到 $C(x)$ 的表达式,得

$$400=5\times0+0.01\times0^2+C,$$

从而确定

$$C=400,$$

于是所求总成本函数为

$$C(x)=5x+0.01x^2+400\ (\text{万元}).$$

【知识与能力拓展】

1. 学习应用 Mathematica 计算不定积分的方法,上机演练

(1) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　(2) $\int x^2\mathrm{d}x$　　(3) $\int\cos x\mathrm{d}x$

2. 使用同一个坐标系,作出函数

$$y=x^4-4x^3 \text{ 和 } y=x^4-4x^3+7$$

的图形. 比较两个图形. 在 $x=-1$,$x=0$ 和 $x=1$ 处作出每个图形的切线,并求出每条切线的斜率. 然后求出每个函数的导数. 比较导数,哪个函数是 $y=4x^3-12x^2$ 的一个原函数?

3. 积分符号来历

牛顿最早引进了微分和积分的符号,与牛顿同时研究微积分的莱布尼茨也引进了积分符号,相对牛顿较晚,但是优于牛顿的积分表达,所以后人就采用莱布尼茨所发明的积分号.

莱布尼茨于 1675 年以“omn. I”表示 I 的总和(积分,Integrals),而 omn 为 omnia(意即所有、全部)之缩写. 其后他又改写为 $\int$,以“$\int I$”表示所有 I 的总和(Summa). $\int$ 为字母 s 的拉长. 此外,他又于 1694 年至 1695 年之间,于 $\int$ 号后置一个逗号,如 $\int ,x\mathrm{d}x$. 至 1698 年,约・伯努利把逗号去掉,后来发展为现今之用法. 傅立叶是最先采用定积分符号(Signs for Definite Integrals)的人,1822 年,他于其名著《热的分析理论》内,采用了 $\frac{\pi}{2}\varphi(x)=\int_0^\pi\varphi(x)\mathrm{d}x+\text{etc.}$ 同时 G・普兰纳采用了 $\int_0^1 a^u\mathrm{d}u=\frac{a-1}{\ln a}$,而这符号很快便为数学界所接受,沿用至今.

【学习效果评估】

(A)

1. 填空题

(1)函数 x^3 为函数__________的一个原函数;

(2)函数 $(x+1)^3$ 为函数__________的一个原函数;

(3)函数 $\sin 2x$ 为函数__________的一个原函数;

(4)函数 $\sin^2 x$ 为函数__________的一个原函数;

(5)函数 $2\sin x$ 为函数__________的一个原函数.

2. 已知函数 $\ln(x^2+1)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,下列函数是否为 $f(x)$ 的原函数?

(1) $\ln(x^2+2)$　　(2) $\ln(x^2+1)+1$

(3) $\ln(2x^2+2)$　　(4) $2\ln(x^2+1)$

3. 验证函数 $\arcsin(2x-1)$,$\arccos(1-2x)$ 及 $2\arcsin\sqrt{x}$ 都是同一函数的原函数.

4. 判断对错:

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$　　(　　)

(2) $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=f(x)\mathrm{d}x$　　(　　)

(3) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$　　(　　)

(4) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$　　(　　)

5. 求下列不定积分:

(1) $\int x^6\mathrm{d}x$　　(2) $\int 6x\mathrm{d}x$

(3) $\int (\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x$　　(4) $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$

(5) $\int (x^2-x+2)\mathrm{d}x$　　(6) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}}$

(7) $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(8) $\int \dfrac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(9) $\int\left(\dfrac{3}{1+x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$　　(10) $\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

6. 设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arccos x+C$,求 $f(x)$.

7. 一曲线经过点 $(\mathrm{e}^2,3)$,且在任一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数,求该曲线方程.

8. 已知曲线在任一点处的切线斜率为 $x+\mathrm{e}^x$,且过点 $(0,2)$,求该曲线方程.

9. 已知一曲线经过点 $(2,1)$,且在其上任意点 (x,y) 处的切线斜率等于 $3x$,求该曲线方程.

10. 已知某函数的导数是 $\sin x+\cos x$，又知当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，函数值为 2，求此函数.

(B)

1. 填空题

(1)设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数,则

$\int f(x)\mathrm{d}x=$__________，$\int f'(x)\mathrm{d}x=$__________，$\int e^x f'(x)\mathrm{d}x=$__________；

(2)设 $f(x)$ 的导数是 a^x，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$__________，$\int f(x)a^{-x}\mathrm{d}x=$__________；

(3)设 $f(x)=\ln x$，则 $\int\left(e^{2x}+\frac{e^x}{\sin^2 x}\right)f'(e^x)\mathrm{d}x=$__________；

(4)设 $\int f'(\tan x)\mathrm{d}x=\tan x+C$，则 $f(x)=$__________.

2. 求下列不定积分

(1) $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x$　　(2) $\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$

(3) $\int\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\mathrm{d}x$　　(4) $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$

(5) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$　　(6) $\int\sec x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x$

(7) $\int\cot^2 x\mathrm{d}x$　　(8) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$

(9) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$

(C)

1. 质点以初速度 v_0 铅直上抛,不计空气阻力,求它的运动规律.

2. 机器操作员的效率 E(表示成百分比)关于时间 t 的变化率可表示为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=30-10t,$$

其中 t 是操作员工作的小时数.

(1)已知操作员工作 2 小时后的效率是 72%，即 $E(2)=72$，求 $E(t)$；

(2)求 3 小时和 5 小时后操作员的效率.

3. 某公司测定出生产 x 件某种产品的边际成本 C' 为

$$C'(x)=x^3+2x.$$

求总成本函数 C，假设固定成本 $C(0)=45$ 元.

4. 某空调公司测定第 x 台空调的边际成本为

$$C'(x)=-0.2x+500,\quad C(0)=0.$$

求生产 100 台空调的总成本.

4.2 换元积分法

本节主要介绍不定积分的第一类换元法(凑微分法)和第二类换元法.

【知识目标】

理解第一类换元法(凑微分法)与第二类换元法的原理.

【能力目标】

运用第一类换元法和第二类换元法求不定积分.

【案例引入】

引例 1 观察积分 $\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x$,由于被积表达式中的 $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x^2)$,所以

$$\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x=\int e^{x^2}\mathrm{d}(x^2).$$

记 $x^2=u$,则上式变为 $\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x=\int e^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\int e^u\mathrm{d}u$,这时就可以利用公式

$$\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$$

进行计算. 即 $\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x=\int e^u\mathrm{d}u=e^u+C=e^{x^2}+C$. 从结果分析,容易验证 e^{x^2} 是 $2xe^{x^2}$ 的一个原函数,说明用这样的方法计算所得结果是正确的. 但这样做是否具有一般性呢?

引例 2 某公司有边际需求函数

$$D'(p)=\frac{-2000p}{\sqrt{25-p^2}}.$$

已知当每件产品的价格是 $p=3$ 元时 $D=13000$,求需求函数.

在基本积分公式中,虽有 $\int x^\mu\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C(\mu\neq-1)$,但现在由于被积函数是一个复合函数,所以不能直接应用,为了能运用这个公式,要先把原积分变形,然后再计算,这就是本节要介绍的换元积分法.

【知识正文】

能够直接利用不定积分的性质和基本积分公式计算的不定积分是十分有限的,本节介绍的换元积分法,是将复合函数的求导法则反过来用于不定积分,通过适当的变量替换(换元),把某些不定积分化为可利用基本积分公式计算的形式,再计算出所求的不定积分.

4.2.1　第一类换元积分法(凑微分法)

一般地,若不定积分的被积表达式能写成

$$f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=f[\varphi(x)]\mathrm{d}[\varphi(x)]$$

的形式,令 $\varphi(x)=u$, 当积分 $\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C$ 容易求得时,可按下述定理计算不定积分.

定理 1　**设 $f(u)$ 具有原函数, $u=\varphi(x)$ 可导,则有换元公式**

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}[\varphi(x)]\xlongequal{\varphi x=u}\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)\big|_{u=\varphi(x)}+C.$$

应用这个定理求积分的关键是把 $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}[\varphi(x)]$, 使得 d 后面的形式与 $F[\varphi(x)]$ 括号里的形式是一样的. 这种积分方法称为**第一类换元积分法(凑微分法)**.

例 1　求 $\int(x+2)^{2013}\mathrm{d}x$.

解　因为 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x+2)$, 故

$$\int(x+2)^{2013}\mathrm{d}x=\int(x+2)^{2013}\mathrm{d}(x+2).$$

设 $x+2=u$, 则

$$\int(x+2)^{2013}\mathrm{d}x=\int(x+2)^{2013}\mathrm{d}(x+2)=\int u^{2013}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2014}u^{2014}+C=\frac{1}{2014}(x+2)^{2014}+C.$$

例 2　求 $\int(a-x)^{100}\mathrm{d}x$.

解　因为 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(-x)=-\mathrm{d}(a-x)$, 故

$$\int(a-x)^{100}\mathrm{d}x=-\int(a-x)^{100}\mathrm{d}(a-x).$$

设 $a-x=u$, 则

$$\int(a-x)^{100}\mathrm{d}x=-\int(a-x)^{100}\mathrm{d}(a-x)=-\int u^{100}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{101}u^{101}+C=-\frac{1}{101}(a-x)^{101}+C.$$

例 3　求 $\int(3x-1)^5\mathrm{d}x$.

解　因为 $\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}(3x)=\frac{1}{3}\mathrm{d}(3x-1)$, 故

$$\int(3x-1)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x-1)^5\mathrm{d}(3x-1).$$

设 $3x-1=u$, 则

$$\int(3x-1)^5\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x-1)^5\mathrm{d}(3x-1)=\frac{1}{3}\int u^5\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}u^6+C$$

$$=\frac{1}{18}(3x-1)^6+C.$$

例 4 求 $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 因为 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{d}(-x^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{d}(1-x^2)$，故

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2).$$

设 $1-x^2=u$，则

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C\\&=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

例 5 求 $\int \mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{d}(5x)$，故

$$\int\mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{5x}\cdot\frac{1}{5}\mathrm{d}(5x)=\frac{1}{5}\int\mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}(5x).$$

设 $5x=u$，则

$$\int\mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{u}+C=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}+C.$$

例 6 求 $\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$.

解 因为 $x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}(x^3)$，故

$$\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}(x^3).$$

设 $x^3=u$，则

$$\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{u}+C=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3}+C.$$

由上面的例题可以看出，如果被积函数能化为两个因式相乘的形式，其中一个因式是 $\varphi(x)$ 的函数 $f[\varphi(x)]$，另一个因式恰好是 $\varphi(x)$ 的导数 $\varphi'(x)$，那么一般可以考虑第一类换元积分法，此时关键是将 $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 凑成微分 $\mathrm{d}[\varphi(x)]$，因此通常又把第一类换元积分法称为凑微分法. 在熟记基本积分公式的基础上通过练习，积累经验，逐步掌握这一类重要的积分方法，在对变量代换比较熟练以后，可以不用写出中间变量 u. 下面把比较常用的凑微分式子归纳如下：

$\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax)$　　　　$\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$

$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$　　　　$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\frac{1}{x})$

$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x}$　　　　$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln|x|)$

$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$　　　　$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$

$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$　　　　$\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arcsin x)$　　　　$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$

例 7　求 $\int\frac{\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　利用 $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}\sqrt{x}$，有

$$\int\frac{\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{2}{3}\int\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}\mathrm{d}\left(3\sqrt{x}\right)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}+C.$$

例 8　求 $\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

解　$\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

例 9　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}$.

解　$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}=\int\frac{1}{1+2\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2\ln x}\mathrm{d}(1+2\ln x)$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C.$$

例 10　求 $\int\cos 5x\mathrm{d}x$.

解　$\int\cos 5x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\cos 5x\mathrm{d}(5x)=\frac{1}{5}\sin(5x)+C$.

例 11　求 $\int\sin 2x\mathrm{d}x$.

解　方法一：原式 $=\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

方法二：原式 $=2\int\sin x\cos x\mathrm{d}x=2\int\sin x\mathrm{d}(\sin x)=(\sin x)^2+C$.

该例也说明用不同的积分方法，得到的结果在形式上可能不相同，但是它们可以通过整理，得到相同的形式. 例如上面例题的两个结果：

$$-\frac{1}{2}\cos 2x+C=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x)+C=\sin^2 x-\frac{1}{2}+C=\sin^2 x+C.$$

当被积函数中含有三角函数时，往往要利用三角恒等式对被积函数进行变形，然后再凑微分.

例 12　求 $\int \tan x \mathrm{d}x$.

解　$\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x) = -\ln|\cos x| + C.$

类似地,可得

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C.$$

当被积函数为 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的偶次幂时,通常利用半角公式降次.

例 13　求 $\int \cos^2 x \mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \mathrm{d}x &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x + \int \cos 2x \mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x \mathrm{d}(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.\end{aligned}$$

当被积函数为 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的奇次幂时,往往分出一个 $\sin x$ 或 $\cos x$,用凑微分法求解.

例 14　求 $\int \cos^3 x \mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \mathrm{d}x &= \int \cos^2 x \cos x \mathrm{d}x = \int \cos^2 x \mathrm{d}(\sin x)\\ &= \int (1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.\end{aligned}$$

通过上述各例,可以看出,用第一类换元法求不定积分需要一定的技巧,如何适当地选择变量代换 $\varphi(x)=u$ 并没有固定的途径可循,要掌握此方法,除了熟悉一些典型的例题外,还需要勤加练习.

例 15　求 $\int \sin^2 x \cos^5 x \mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^5 x \mathrm{d}x &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \,(1-\sin^2 x)^2 \mathrm{d}(\sin x)\\ &= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\,\mathrm{d}(\sin x)\\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.\end{aligned}$$

例 16　求 $\int \tan^3 x \mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \mathrm{d}x &= \int \tan x \tan^2 x \mathrm{d}x = \int \tan x (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \tan x \sec^2 x \mathrm{d}x - \int \tan x \mathrm{d}x\\ &= \int \tan x \mathrm{d}(\tan x) + \ln|\cos x|\\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

例 17　求 $\int \sin 3x \cos x \mathrm{d}x$.

解　$$\int \sin 3x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin 4x \mathrm{d}(4x) + \frac{1}{4}\int \sin 2x \mathrm{d}(2x)$$
$$= -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

例 18　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$.

解　$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

类似地可得：

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

例 19　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2}$.

解　$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{a+x} + \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{a-x}$$
$$= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a+x}\mathrm{d}(a+x) - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}(a-x)$$
$$= \frac{1}{2a}\ln|a+x| - \frac{1}{2a}\ln|a-x| + C$$
$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

例 20　求 $\int \csc x \mathrm{d}x$.

解　$$\int \csc x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$$
$$= \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

类似地可得

$$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

例 21　求解本节中的引例 2.

解　由题意知，需求函数

$$D(p) = \int D'(p)\mathrm{d}p = \int \frac{-2000p}{\sqrt{25-p^2}}\mathrm{d}p$$
$$= -1000\int \frac{1}{\sqrt{25-p^2}}\mathrm{d}p^2 = 1000\int \frac{1}{(25-p^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}(25-p^2)$$

$$=2000\,(25-p^2)^{\frac{1}{2}}+C=2000\sqrt{(25-p^2)}+C.$$

将初值 $p=3$ 时 $D=13000$ 带入上式,得

$$C=5000,$$

故需求函数为

$$D(p)=2000\sqrt{(25-p^2)}+5000.$$

4.2.2 第二类换元积分法

适当的选择变换 $x=\varphi(t)$,将积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 转化为 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.这是另一种形式的变量代换.

定理 2 设 $x=\varphi(t)$ 是单调的、可导的函数,$\varphi'(t)\neq 0$.并且 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数,则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

这种积分方法称为**第二类换元积分法**.

1.根式代换

若被积函数含有形如 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+\mathrm{d}}}$ 的根式时,为去掉被积函数里的根式,可作如下变量代换:

由 $\sqrt[n]{ax+b}=t$,解出 x,然后令 $x=\frac{t^n-b}{a}$;

由 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+\mathrm{d}}}=t$,解出 x,然后令 $x=\frac{b-\mathrm{d}t^n}{ct^n-a}$.

例 22 求 $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 为了去掉根号,可令 $\sqrt{x}=t(t>0)$,则 $x=t^2$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{1+t}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int\frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t\\&=2\left(\int\mathrm{d}t-\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t\right)=2[t-\ln(t+1)]+C\\&=2[\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)]+C.\end{aligned}$$

2.三角代换

若被积函数含有形如 $\sqrt{a^2-x^2}$,$\sqrt{x^2+a^2}$,$\sqrt{x^2-a^2}$ 的二次根式,为去掉根式,常作如下三角代换:

当被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$,令 $x=a\sin t$,则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$;

当被积函数中含有 $\sqrt{x^2+a^2}$,令 $x=a\tan t$,则 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$;

当被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$，则 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$.

例 23　求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解　令 $x=a\sin t\left(|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x&=a^2\int\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C\\&=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C.\end{aligned}$$

由 $x=a\sin t$，得

$$t=\arcsin\frac{x}{a},\qquad \sin t=\frac{x}{a},\qquad \cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

因此，

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

这种类型的题目也可建立辅助三角形，利用直角三角形边角关系直接实现变量还原：如本例，由所设 $x=a\sin t$，即 $\dfrac{x}{a}=\sin t$，作直角三角形(如图 4-2 所示)，依图可知：$\cos t=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$.

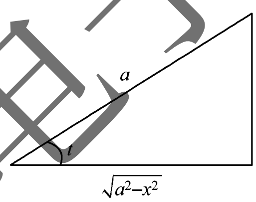

图 4-2

例 24　求 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解　令 $x=a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2t\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{a\sec^2t}{a\sec t}\mathrm{d}t=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1\\&=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1\\&=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C\quad(C=C_1-\ln a).\end{aligned}$$

例 25　求 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x(a>0)$.

解　令 $x=a\sec t$，$t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right)$，则

$$\mathrm{d}x = a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\tan t,$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \sec t\,\mathrm{d}t = \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C\ (C = C_1 - \ln a).$$

3.倒代换

倒代换也是一种很有用的代换,该方法设 $x=\frac{1}{t}$,利用它常可消去被积函数的分母中的变量因子 x,下面举例说明.

例 26　求 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\ (x>1)$.

解　令 $x=\frac{1}{t}$,则 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,于是

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$= \arccos t + C = \arccos\frac{1}{x} + C.$$

【知识与能力拓展】

1.本节中一些例题的结果以后会经常遇到,所以它们通常也被当作公式使用,这样,常用积分公式,除了基本积分表中的公式外,再补充下面几个(其中常数 $a>0$).

(14) $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

(15) $\int \cot\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

(16) $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(17) $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

(18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

(19) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

(20) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(21) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$

(22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

2. 学习应用 Mathematica 软件计算不定积分的方法，并上机演练：

(1) $\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x$；　　　　(2) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

【学习效果评估】

(A)

1. 填空使下列等式成立

(1) $\mathrm{d}x = \underline{\qquad\qquad}\,\mathrm{d}(7x - 3)$　　　　(2) $x\mathrm{d}x = \underline{\qquad\qquad}\,\mathrm{d}(1 - x^2)$

(3) $x^3\mathrm{d}x = \underline{\qquad\qquad}\,\mathrm{d}(3x^4 - 2)$　　　　(4) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \underline{\qquad\qquad}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$

(5) $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \underline{\qquad\qquad}\,\mathrm{d}(5\ln|x|)$　　　　(6) $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \underline{\qquad\qquad}\,\mathrm{d}(3 - 5\ln|x|)$

(7) $\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \underline{\qquad\qquad}\,\mathrm{d}(\sqrt{t})$　　　　(8) $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 2x} = \underline{\qquad\qquad}\,\mathrm{d}(\tan 2x)$

(9) $\frac{\mathrm{d}x}{1 + 9x^2} = \underline{\qquad\qquad}\,\mathrm{d}(\arctan 3x)$

2. 判断题

(1) $x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$　　　　(2) $x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}(x^3)$

(3) $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)$　　　　(4) $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sqrt{x})$

(5) $\ln x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\ (x > 0)$　　　　(6) $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

(7) $\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\cos x)$　　　　(8) $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$

3. 求下列不定积分

(1) $\int (5x + 2)^{10}\mathrm{d}x$　　　　(2) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2 + 3}$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{5 - 3x}}$　　　　(4) $\int \mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t$

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3 - 2x}$　　　　(6) $\int \frac{3x^3}{1 - x^4}\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$　　　　(8) $\int x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$　　　　(10) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$　　　　(12) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}$　　　　(14) $\int (\sin ax - \mathrm{e}^{\frac{x}{b}})\,\mathrm{d}x$

(15) $\int \tan^{10} x \sec^2 x \mathrm{d}x$　　(16) $\int \tan^3 x \cdot \sec x \mathrm{d}x$

(17) $\int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$　　(18) $\int \sin 2x \cos 3x \mathrm{d}x$

(B)

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$　　(2) $\int \cos^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$　　(4) $\int \frac{10^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(5) $\int \tan\sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$　　(6) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25-9x^2}}$　　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$

(9) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$　　(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-1}$

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\mathrm{d}x$　　(6) $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,\mathrm{d}x$

3. 用倒代换 $x=\frac{1}{t}$ 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

4. 已知函数 $f(x)$，满足 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$，且 $f(0)=1$. 求函数 $f(x)$.

5. 设 $I_n=\int \tan^n x \mathrm{d}x$，求证：$I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2}$，并求 $\int \tan^5 x \mathrm{d}x$.

(C)

1. 已知某物体在时刻 t 的运动加速度为 $3t^2-\sin t$，如果初速度 $v_0=3$，初始位移 $s_0=2$. 试求此物体的运动方程(位移 s 与时间 t 的函数关系).

2. 某公司测定它的边际成本函数为 $C'(x)=4x\sqrt{x+3}$，已知 $C(13)=1126.40$ 元，求总成本函数.

4.3　分部积分法

本节主要介绍不定积分的分部积分法.

【知识目标】

理解分部积分法,记忆常见的利用分部积分计算不定积分的类型.

【能力目标】

运用分部积分法计算常见类型的不定积分,并解决实际问题.

【案例引入】

引例　某公司测定它的边际利润函数为

$$L'(x)=1000x^2\mathrm{e}^{-0.2x},$$

已知 $x=0$ 时 $L=2000$ 元,求总利润.

由题意知,总利润 $L(x)=\int L'(x)\mathrm{d}x=\int 1000x^2\mathrm{e}^{-0.2x}\mathrm{d}x$. 但这个积分用前面学过的方法无法求解.

【知识正文】

前面介绍的换元积分法,虽然可以解决许多积分的计算问题,但对一些不定积分却仍然无能为力,例如 $\int x\sin x\mathrm{d}x$, $\int \ln x\mathrm{d}x$ 等. 本节介绍另一种基本积分法——分部积分法.

已经知道两个函数 u 和 v 的乘积的微分运算公式是

$$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u,$$

对该公式的两边积分并利用积分性质得

$$uv=\int u\mathrm{d}v+\int v\mathrm{d}u,$$

移项得

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u,$$

这就是**分部积分公式**,利用上式求不定积分的方法称为**分部积分法**. 它的特点是把求积分 $\int u\mathrm{d}v$ 转化成求积分 $\int v\mathrm{d}u$, 因而如果 $\int v\mathrm{d}u$ 比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易计算,就可以使用此方法计算不定积分.

利用分部积分公式求不定积分的关键在于如何将所给积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化成 $\int u\mathrm{d}v$ 的形式,使积分更容易计算,例如,

$$\int xe^x\,dx=\int x\,de^x=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C=(x-1)\,e^x+C.$$

一般情况下,选择 u 和 v 的原则是:

(1) v 容易求出;

(2)新积分 $\int v\,du$ 比原积分 $\int u\,dv$ 容易计算.

利用分部积分法计算不定积分,选择好 u、v 非常关键,选择不当将会使积分的计算变得更加复杂,例如,

$$\int xe^x\,dx=\int e^x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}e^x-\int\frac{x^2}{2}de^x=\frac{x^2}{2}e^x-\int\frac{x^2}{2}e^x\,dx.$$

再如:

$$\int x\cos x\,dx=\int x\,d\sin x=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C,$$

$$\int x\cos x\,dx=\int\cos x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\cos x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}d\cos x=\cos x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int x^2\sin x\,dx.$$

由此可见,使用分部积分法的关键在于选择 u 和 v. 经过大量的计算经验,得到选择 u,v 的一般方法如下:观察被积函数,它往往是由反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数中的两类函数相乘构成,按照“反、对、幂、三、指”的顺序,把排在前面的那个函数选做 u,特别注意不是把排在后面的那个函数选作 v,而是把排在后面的那个函数与 dx 的乘积利用凑微分 $f'(x)\,dx=df(x)$ 作为 dv,有了 dv 自然也就有了 v.

例 1 求 $\int x^2e^x\,dx$.

解 被积函数中 x^2 是幂函数,e^x 是指数函数,根据“反、对、幂、三、指”的顺序,幂函数排在指数函数之前,所以取 $u=x^2$,且 $e^x\,dx=de^x=dv$,则

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx&=\int x^2\,de^x=x^2e^x-\int e^x\,d(x^2)=x^2e^x-\int e^x\cdot 2x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx\\&=x^2e^x-2(x-1)\,e^x+C=(x^2-2x+2)e^x+C.\end{aligned}$$

例 2 求 $\int x^3\ln x\,dx$.

解 令 $u=\ln x$,$x^3\,dx=d\left(\frac{x^4}{4}\right)=dv$,则

$$\begin{aligned}\int x^3\ln x\,dx&=\int\ln x\,d\left(\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{1}{4}x^4\ln x-\int\frac{1}{4}x^4\,d(\ln x)=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^4\cdot\frac{1}{x}dx\\&=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C.\end{aligned}$$

例 3 求 $\int\ln(x+1)\,dx$.

解 在这个被积函数中只有对数函数,取 $u=\ln(1+x)$,$dv=dx$,则 $du=\frac{1}{1+x}dx$,$v=x$. 所以

$$\int \ln(x+1)\mathrm{d}x = x\ln(1+x) - \int x\mathrm{d}\ln(x+1) = x\ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$$
$$= x\ln(1+x) - \int \frac{x+1-1}{1+x}\mathrm{d}x = x\ln(1+x) - \int (1 - \frac{1}{1+x})\mathrm{d}x$$
$$= x\ln(1+x) - x + \ln(x+1) + C.$$

例 4　求 $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=\arcsin x$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$, 即 $x=v$, 则

$$\int \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int x\mathrm{d}(\arcsin x) = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

可见,当被积函数只有一个函数,并且该函数是反三角函数或者对数函数时,则该函数就选作 u, d 后面的 x 就是 v.

例 5　求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解　令 $u=\arctan x$, $x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\,\dfrac{x^2}{2}=\mathrm{d}v$, 则

$$\int x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x-\arctan x) + C$$
$$= \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + C.$$

以上是比较常见的利用分部积分法计算不定积分的题目,当然分部积分法不仅仅只适用于以上几种类型的被积函数,还可灵活地计算出很多不同类型的积分.

例 6　求 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解
$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \int \sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\sin x)$$
$$= \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$= \mathrm{e}^x\sin x - \left(\mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\cos x\right)$$
$$= \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x.$$

解得 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

例 7 求 $\int \sin(\ln x)\,dx$.

解
$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int x\,d[\sin(\ln x)] = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$$
$$= x\sin(\ln x) - \left\{x\cos(\ln x) - \int x\,d[\cos(\ln x)]\right\}$$
$$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \int \sin(\ln x)\,dx.$$

解得 $\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$.

灵活应用分部积分法,可以解决许多不定积分的计算问题.

例 8 求 $\int \sec^3 x\,dx$.

解
$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x\,dx = \int \sec x\,d\tan x$$
$$= \sec x\tan x - \int \tan x\,d\sec x$$
$$= \sec x\tan x - \int \tan x \cdot \sec x\tan x\,dx$$
$$= \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$
$$= \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\,dx,$$

解得 $\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$.

例 9 求 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$(其中 n 为自然数,$a > 0$).

解 显然有 $I_0 = x + C$.

当 $n = 1$ 时,有 $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$.

当 $n > 1$ 时,利用分部积分法,得
$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\,d\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right]$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},$$

于是得

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

以此类推公式,并由 $I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$,即可求出 I_n.

例 10　已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2},求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解　利用分部积分公式,得

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x.$$

根据题意

$$\int f(x)\mathrm{d}x=e^{-x^2}+C,$$

上式两边同时对 x 求导,得

$$f(x)=-2xe^{-x^2},$$

所以

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=-2x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}-C.$$

至此,介绍了计算不定积分的基本方法:第一换元积分法,第二换元积分法和分部积分法,利用这些方法可以计算许多不定积分问题,在有些问题中,需几种方法结合使用.

例 11　求 $\int\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

解　应用不定积分的换元积分法:令 $t=\sqrt{x}$,即 $x=t^2$,从而 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,则

$$\int\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int\cos t\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int t\mathrm{d}(\sin t).$$

再应用不定积分的分部积分法,有

$$\int\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2\left(t\sin t-\int\sin t\mathrm{d}t\right)=2(t\sin t+\cos t)+C,$$

代回 $t=\sqrt{x}$,得

$$\int\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})+C.$$

例 12　求解本节中的引例.

解　由题意知,总利润为

$$\begin{aligned}L(x)&=\int L'(x)\mathrm{d}x=\int 1000x^2e^{-0.2x}\mathrm{d}x\\&=-5000\int x^2\mathrm{d}e^{-0.2x}\\&=-5000\left(x^2e^{-0.2x}-2\int xe^{-0.2x}\mathrm{d}x\right)\\&=-5000\left(x^2e^{-0.2x}+10\int x\mathrm{d}e^{-0.2x}\right)\end{aligned}$$

$$=-5000[x^2 e^{-0.2x}+10(xe^{-0.2x}-\int e^{-0.2x}\mathrm{d}x)]$$
$$=-5000[x^2 e^{-0.2x}+10xe^{-0.2x}+50e^{-0.2x}]+C$$
$$=-5000[x^2+10x+50]e^{-0.2x}+C.$$

将初始条件 $x=0$ 时 $L=2000$ 代入,得

$$C=252000,$$

故总利润为

$$L(x)=-5000[x^2+10x+50]e^{-0.2x}+252000.$$

【知识与能力拓展】

1. 学习应用 Mathematica 软件计算不定积分的方法.

2. 上机演练

(1) $\int x\sin x\mathrm{d}x$　　(2) $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$

【学习效果评估】

(A)

1. 求下列不定积分:

(1) $\int x\sin x\mathrm{d}x$　　(2) $\int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

(3) $\int xe^{-x}\mathrm{d}x$　　(4) $\int x^2 e^{-x}\mathrm{d}x$

(5) $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$　　(6) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(7) $\int (\ln x)^2\mathrm{d}x$　　(8) $\int\ln x\mathrm{d}x$

(9) $\int\arccos x\mathrm{d}x$　　(10) $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$

(B)

1. 求下列不定积分:

(1) $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$　　(2) $\int e^{-x}\cos x\mathrm{d}x$

(3) $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$　　(4) $\int\frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$

(5) $\int e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$　　(6) $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$

(7) $\int e^x\sin^2 x\mathrm{d}x$　　(8) $\int x\ln^2 x\mathrm{d}x$

2. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数,求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

3. 已知 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，求 $\int xf''(x)\mathrm{d}x$.

4. 设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，且 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，求 $\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x$.

5. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2\,(1+x)^2}$，又 $F(0)=1$，$F(x)>0$，试求 $f(x)$.

6. 设 $I_n=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}(n\geqslant 2)$，证明：$I_n=-\dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2}$.

(C)

1. 某家庭每天电的消费速率(以千瓦小时计)是

$$F'(t)=K(t)=10te^{-t},$$

其中 t 是时间，以小时计，即 t 在区间 $[0,24]$ 中. 已知 $F(0)=0$，求 $F(t)$.

4.4* 有理函数的积分

本节主要介绍有理函数的积分、可化为有理函数的积分以及简单无理函数的积分.

【知识目标】

记忆将有理分式分解为部分分式之和的待定系数法；记忆三角有理式的不定积分；记忆简单无理函数的积分.

【能力目标】

能够分别应用待定系数法和万能置换法求解有理函数和三角有理式的不定积分.

【案例引入】

引例　在一条新装配线上一位雇员学会某项任务的概率的变化率为

$$p'(t)=\frac{1}{t\,(2+t)^2},$$

其中 p 是在时间 t (以月计)后学会该项任务的概率. 已知 $t=2$ 时 $p=0.8267$，求函数 $p(t)$.

这个积分的被积函数是有理函数，前面学过的计算方法并不适用. 下面将介绍有理函数的积分.

【知识正文】

设 $P_n(x)$ 和 $Q_m(x)$ 分别为 x 的 n 次和 m 次多项式，其中 n 和 m 为正整数且多项式 $P_n(x)$

和 $Q_m(x)$ 无公因子，将它们的商 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 称为有理分式.

如果 $n<m$，则称 $R(x)$ 为有理真分式；如果 $n\geqslant m$，则称 $R(x)$ 为有理假分式.

4.4.1 有理分式的不定积分

1. 最简分式的不定积分

下列四类分式称为最简分式，其中 n 为大于等于 2 的正整数，A,M,N,a,p,q 均为常数，且 $p^2-4q<0$（即 x^2+px+q 为二次质因式）：

(1) $\dfrac{A}{x+a}$　　(2) $\dfrac{A}{(x+a)^n}$　　(3) $\dfrac{A}{x^2+px+q}$　　(4) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$

下面举例来说明这四类最简分式的不定积分的计算.

例 1 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}(x+1)=\ln|x+1|+C.$

例 2 求 $\displaystyle\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)=-\frac{1}{x-1}+C.$

例 3 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\arctan x+C.$

例 4 求 $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$

在计算有理函数的最简分式积分时，首先考虑直接应用不定积分基本公式或第一类换元积分法.

2. 有理真分式的不定积分

计算有理函数的不定积分的难点，在于如何将所给有理真分式化为最简分式之和.

例 5 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{(x+1)(x-1)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

例 6　求 $\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

解　因为 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，所以设

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

其中 A,B 为待定系数，两端消去分母，得

$$x+3=A(x-3)+B(x-2)=(A+B)x-(3A+2B),$$

解得 $A=-5,B=6$，即

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3},$$

所以　$$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)\mathrm{d}x=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.$$

例 7　求 $\int\frac{1}{(x-2)(x-5)}\mathrm{d}x$.

解　$$\int\frac{1}{(x-2)(x-5)}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{(x-2)-(x-5)}{(x-2)(x-5)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{x-5}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int\frac{1}{x-5}\mathrm{d}(x-5)-\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}(x-2)\right]$$

$$=\frac{1}{3}(\ln|x-5|-\ln|x-2|)+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C.$$

在上面 3 个例子中，都是对给定有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，表示为最简分式的和，首先要把分母 $Q(x)$ 在实数范围内分解为一次因式与二次质因式的乘积，再根据这些因式的结构，利用待定系数法确定所有系数.

例 8　求 $\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

解　被积函数为有理函数.

令 $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$，其中 A,B,C 为待定常数，通分后两端比较，得

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1),$$

令 $x=0$，得 $A=1$；令 $x=1$，得 $B=1$；令 $x=2$，得 $C=-1$，即

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1},$$

所以 $\displaystyle\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right]\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{x-1}-\ln|x-1|+C.$

例 9 求 $\displaystyle\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解 设被积函数可分解成

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

其中 A,B,C 为待定系数，两端通分并约去分母，得

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x),$$
$$1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+c+A,$$

即 $A+3B=0,B+2C=0,A+C=1$，解得

$$A=\frac{4}{5},B=-\frac{2}{5},C=\frac{1}{5},$$

所以

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{5}\ln|1+2x|-\frac{1}{5}\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{5}\ln|1+2x|-\frac{1}{5}\ln(1+x^2)+\frac{1}{5}\arctan x+C.\end{aligned}$$

前面所介绍的求有理函数的不定积分的方法虽然具有普遍适用的特点，但在具体积分计算时，不应拘泥于上述方法，而应根据被积函数的特点，灵活选用其它各种能简化积分计算的方法.

例 10 求 $\displaystyle\int\frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x&=\int\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+4)}{x^4+5x^2+4}+\int\frac{x^2+1+x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln|x^4+5x^2+4|+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\\&=\frac{1}{2}\ln|x^4+5x^2+4|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C.\end{aligned}$$

在有理分式的分解式中，应注意到以下两点：

(1) 若分母 $Q(x)$ 中含有因式 $(x-a)^k$，则分解后含有下列 k 个最简分式之和

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都是常数，特殊地，若 $k=1$，分解后有 $\dfrac{A}{x-a}$.

(2) 若分母 $Q(x)$ 含有因式 $(x^2+px+q)^k$，其中 $p^2-4q<0$，则分解后含有下列 k 个最简分式之和：

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q},$$

其中 $M_i,N_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 都是常数，特别地，若 $k=1$，分解后有

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}.$$

3. 有理假分式的不定积分

利用多项式除法，可以把任意一个假分式化为一个有理整式和一个有理真分式之和. 例如

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

有理整式的积分很简单；有理真分式的积分，也已经讨论过了.

例 11　求 $\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解　$\displaystyle\int\frac{x^3+x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+\arctan x+C.$

4.4.2　三角函数有理式的积分

由 $\sin x,\cos x$ 和常数经过有限次四则运算构成的函数称为**三角有理函数**，记为 $R(\sin x,\cos x)$.

三角函数的积分比较灵活，方法很多. 在换元积分法和分部积分法中我们都介绍过一些方法，这里主要介绍三角函数有理式的积分方法，其基本思想是通过适当的变换，将三角有理函数化为有理函数的积分.

由三角函数理论可知道，$\sin x$ 和 $\cos x$ 都可以用 $\tan\dfrac{x}{2}$ 的有理化来表示，即

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

因此，如果令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $x=2\arctan u$，从而有

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}. \tag{4-1}$$

由此可见,通过变换 $u=\tan\frac{x}{2}$,三角函数有理式的积分总是可以化为有理函数的积分,即

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

所以这个变换公式又称为**万能置换公式**.

有些情况下(如三角函数有理式中 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的幂次均为偶数时),常用变换 $u=\tan x$,此时易推出

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\ \mathrm{d}x=\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u, \tag{4-2}$$

这个变换公式常称为**修改的万能置换公式**.

例 12 求 $\int\frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

解 方法一:由万能置换公式,令 $u=\tan\frac{x}{2}$,则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^4}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u\\&=\int\frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}\right]+C\\&=-\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3}-\frac{3}{8\tan\frac{x}{2}}+\frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}+C.\end{aligned}$$

方法二:利用修改的万能置换公式,令 $u=\tan x$,则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4}\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1+u^2}{u^4}\mathrm{d}u=-\frac{1}{3u^3}-\frac{1}{u}+C\\&=-\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x+C.\end{aligned}$$

方法三:不用万能置换公式.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x&=\int\csc^2 x(1+\cot^2 x)\,\mathrm{d}x=\int\csc^2 x\mathrm{d}x+\int\cot^2 x\csc^2 x\mathrm{d}x\\&=-\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C.\end{aligned}$$

比较以上三种方法可知,万能置换公式不一定是最佳方法,故有理式的计算中先考虑其他方法,不得已才用万能置换公式.

例 13　求$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解　令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$，于是

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int \frac{t^2+1+2t}{2t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}\ln|t|+t+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+C.$$

4.4.3　简单无理函数的积分

求简单无理函数的积分，其基本思想是利用适当的变换将其有理化，转化为有理函数的积分，下面通过实例来具体说明.

例 14　求$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\mathrm{d}x$.

解　为了去掉根号，可令 $\sqrt{2x}=t(t>0)$，则 $2x=t^2$，$x=\frac{1}{2}t^2$，$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+t}t\,\mathrm{d}t=\int \frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=\int \mathrm{d}t-\int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=t-\ln(t+1)+C$$

$$=\sqrt{2x}-\ln(\sqrt{2x}+1)+C.$$

例 15　求$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$.

解　为同时消去被积函数中的根式 $\sqrt{x}$ 和$\sqrt[3]{x}$，可令 $x=t^6$，则 $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$. 从而

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x=\int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\mathrm{d}t=\int \frac{6t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=6[t-\arctan t]+C$$

$$=6[\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}]+C.$$

例 16　求$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$.

解　为了去掉根号，可以设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，于是 $\frac{1+x}{x}=t^2$，$x=\frac{1}{t^2-1}$，$\mathrm{d}x=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$，从而所求积分为

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x=\int (t^2-1)\,t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t=-2\int \frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C \\
&=-2t+2\ln(t+1)-\ln|t^2-1|+C \\
&=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln\left[\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right]+\ln|x|+C.
\end{aligned}
$$

例 17 求解本节中的引例.

解 由题意知

$$
\begin{aligned}
p(t)&=\int p'(t)\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t(2+t)^2}\mathrm{d}t \\
&=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t+4}{(t+2)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}-\frac{2}{(t+2)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&=\frac{1}{4}\left[\ln t-\ln(t+2)+2\,\frac{1}{t+2}\right]+C.
\end{aligned}
$$

将 $t=2$ 时 $p=0.8267$ 代入，得

$$C=0.875,$$

故

$$p(t)=\frac{1}{4}\left[\ln t-\ln(t+2)+2\,\frac{1}{t+2}\right]+0.875.$$

本章介绍了不定积分的概念和计算方法.必须指出的是：初等函数在它有定义的区间上的不定积分一定存在，但不定积分存在与不定积分能否用初等函数表示出来不是一回事. 事实上，有很多初等函数，它们的不定积分是存在的，但却无法用初等函数表示出来，如：$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$，$\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$，$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

【知识与能力拓展】

1. 学习应用 Mathematica 软件计算不定积分的方法，上机演练：

(1) $\int\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$　　(2) $\int\frac{1}{3+\sin^2 x}\mathrm{d}x$

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

【学习效果评估】

(A)

1. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{1}{x^2-x-6}\mathrm{d}x$　　(2) $\int\frac{1}{x^2-4}\mathrm{d}x$

(3) $\int\frac{x+1}{(x-1)^3}\mathrm{d}x$　　(4) $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$　　(6) $\int \frac{x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$　　(8) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$　　(10) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{1}{3+\sin^2 x}\mathrm{d}x$　　(12) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$

(B)

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x^3}{x+3}\mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{2x+3}{x^2-2x-+5}\mathrm{d}x$　　(4) $\int \frac{1}{(x+x^2)(1+x^2)}\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$　　(6) $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\mathrm{d}x$

(C)

1. 一家草坪机器公司引进一种新型的草坪播种机. 公司发现，关于这种播种机的边际供给函数满足

$$S'(p)=\frac{100p}{(20-p)^2}\ (0\leqslant p\leqslant 19),$$

其中 S 是每台播种机价格为 p 千元时所销售的数量. 已知当价格是 19 千元时，公司将销售 2000 台播种机，求供给函数 $S(p)$.

单元训练

一、知识评估

1. 单项选择题

(1)若 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数，则(　　)

(A) $\int f(x)\mathrm{d}x=g(x)+C$　　(B) $\int g(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$

(C) $\int f'(x)\mathrm{d}x=g(x)+C$　　(D) $\int g'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$

(2)下列各对函数中，是同一个函数的原函数的是(　　)

(A) $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$　　(B) $\sin^2 x$ 和 $\cos^2 x$

(C) $(e^x+e^{-x})^2$ 和 $e^{2x}+e^{-2x}$　　(D) $\frac{2^x}{\ln 2}$ 和 $2^x+\ln 2$

(3)若 $f(x)$ 的导数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是(　　)

(A) $1+\sin x$　　(B) $1-\sin x$

(C) $1+\cos x$　　　　(D) $1-\cos x$

(4)下列等式成立的是(　　)

(A) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　　　(B) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$　　　　(D) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$

(5) $\int xf''(x)\mathrm{d}x=$(　　)

(A) $xf'(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$　　　　(B) $xf'(x)-f'(x)+C$

(C) $xf'(x)-f(x)+C$　　　　(D) $f(x)-xf'(x)+C$

(6)设 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-2x}，则 $f(x)=$(　　)

(A) e^{-2x}　　　　(B) $-2\mathrm{e}^{-2x}$

(C) $-4\mathrm{e}^{-2x}$　　　　(D) $4\mathrm{e}^{-2x}$

(7)设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$(　　)

(A) $\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x$　　　　(B) $\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin^4 x$

(C) $x-\frac{1}{2}x^2$　　　　(D) $\cos^2 x-\cos^4 x$

(8) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\neq$(　　)

(A) $\operatorname{arccot}\frac{1}{x}+C$　　　　(B) $\arctan x+C$

(C) $\arctan x\cdot\frac{1}{x}+C$　　　　(D) $\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}+C$

2.填空题

(1)设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$______.

(2)若 $\int f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+C$，则 $f(x)=$______.

(3)设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$，则 $\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=$______.

(4)设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$______.

(5)设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则 $\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=$______.

(6)设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x-x$，则 $\int\mathrm{e}^{2x}f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=$______.

(7)设 $\int\frac{f(x)\cdot\sin(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin^2(\ln x)+C$，则 $f(x)=$______.

(8)设 $\int f(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$______.

3. 用适当的方法求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(2) $\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{x+\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$

(5) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$　　(6) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$　　(8) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$　　(10) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$

(11) $\int \tan^4 x\mathrm{d}x$　　(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$　　(14) $\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$

(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$　　(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

(17) $\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$　　(18) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$

(19) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x$　　(20) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

二、单元项目

案例　物体的运动路程

已知一辆汽车以速度 $v(t)$（米/秒）行驶，从启动开始测试其瞬时速度，要求每秒测量一次.

(1)在坐标系中作出测量数据的散点图，通过曲线拟合，确定在初等函数中，哪一类与这组数据拟合得最好？

(2)使用 Mathematica 软件求得与所测量数据拟合最好的函数.

(3)求出汽车在 $t=0$ 秒到 $t=5$ 秒的行驶路程.