第 6 章　多元函数微分学

一、单元概述

《高等数学(上册)》主要研究的一元函数仅仅依赖于一个自变量. 但许多科学技术和经济管理的实际问题，往往不是由一个因素决定，而是由多种因素决定的，反映在数学上，就是一个变量依赖于多个变量的多元函数问题. 本章首先介绍空间解析几何的基本知识，为多元函数的研究提供几何背景和基础，然后讨论多元函数的概念及其微分学. 它实际上是一元函数微分学的推广与发展，二者有着密切的联系，但又有一些本质的差异，在学习中要注意把握. 本书主要讨论二元函数，其理论与方法不难向更一般的多元函数推广.

通过本章的学习，理解向量代数、空间曲线及曲面的概念；理解多元函数的概念；理解偏导数和全微分的概念；学会运用不同方法求解不同形式二元函数的偏导数和全微分；会求曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线；理解多元函数极值和条件极值的概念，学会运用二元函数极值存在条件求二元函数的极值；会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单二元函数的最大值和最小值，学会运用二元函数微分学知识解决一些简单实际问题. 通过本章的学习，培养学生抽象思维、逻辑推理等数学思维能力；培养学生应用数学知识、数学思想和数学工具分析和解决实际问题的能力；使学生受到书面表达和团队协作的进一步训练.

二、教学重点与难点

1. 重点：曲面方程、旋转曲面、柱面等二次曲面，多元函数的概念，偏导数与全微分的概念，多元复合函数的求导法则，用拉格朗日条件极值求最大值应用问题.

难点：二次曲面，全微分的概念，多元复合函数的求导法则.

2. 解决方案：

空间解析几何中空间二次曲面的概念：通过课件展示和 Mathematica 软件绘图，将二次曲面的几何图形直观呈现出来，并结合它们的方程进行分析讲解.

多元函数概念及偏导数与全微分的概念：从知识的实际应用问题中引出多元函数及其微分的概念和理论，应用案例引导学生归纳出新的概念和知识.

多元复合函数的求导法则：采用练习教学法，精讲多练.

用拉格朗日条件极值求最大值应用问题：以实际应用问题引导知识，用知识引申应用，即从实际应用案例引出拉格朗日条件极值问题，从中归纳出拉格朗日乘数法，再将此方法应用到更多的实际问题中去，通过实例详细讲解该方法在几何学、物理学和经济学方面的应用.

三、项目导学

一渔船正驶入浅滩,为确保安全,探测前方1平方公里范围内的水深情况,设点(x,y)处的水深为z米,通过声纳探测得到一组数据点(如表0-1所示).假设该船满载时吃水深度为8.3米,问该船有无触礁的风险?

表0-1 海底测量数据

x	70	129	140	103	88	185	195	105	157	107	77	81	162	162	117
y	−90	7	141	23	147	22	137	85	−6	−81	3	56	−66	84	−33
z	−8	−4	−8	−6	−8	−6	−8	−8	−9	−9	−8	−8	−9	−4	−9

是否有触礁的风险抽象为最低水深是否大于渔船满载时船底吃水的深度,所以关键问题是寻找水深的"最小值"或是海底面的"最高点".这个问题的解决首先需要对表0-1中的数据进行二元拟合,得到海底曲面的方程,再利用偏导数求二元函数的最值.本章将介绍空间解析几何的基本知识以及多元函数微分学及其应用.

6.1 向量及其线性运算

本节主要介绍空间直角坐标系的概念、向量的概念及其向量的线性运算.

【知识目标】

理解向量的概念及其表示;理解单位向量、方向角与方向余弦、向量的坐标表达式;根据向量的线性运算建立空间直角坐标系,理解空间点的坐标,记忆空间两点间的距离公式.

【能力目标】

会运用空间直角坐标系中点的坐标描述几何问题,会求空间两点间的距离,会用坐标进行向量的线性运算.

【案例引入】

引例1 如图6-1所示,如何求出多面体任意两顶点间的距离呢?根据平面直角坐标系的知识,可以做一个通过该两点的平面,并在该平面上建立平面直角坐标系,找到该两点的平面直角坐标,进而利用平面上两点间的距离公式$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$来求出.但是,如果是要计算多面体每两个顶点之间的距离呢?是否需要每两个点都要做一个平面,并在该平面上建立一个平面直角坐标系呢?这样将会做很多重复工作,因为需要建立很多个平面直角坐标系,而且一个顶点在多个平面直角坐标系上分别找到其坐标也相当困难.那么能否只建立一个坐标系,使得每一个顶点在该坐标系上都有确定的坐标,而不需要在多个平面直角坐标系中分别找到其坐标呢?进而,是否也有一个和平面上两点间的距离公式$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$类似的公式存在呢?这样的坐标系是存在的,就是空间直角坐标系,类似的空间两点间的距离计算公式也是存在的.

引例 2　客观世界有各种各样的量，比如时间、质量、长度、距离、力、速度、位移、加速度等等. 我们知道，时间过了 5 分钟就是 5 分钟，非常明确. 但如果描述飞机飞行速度时，只说飞机以 600 公里/小时的速度飞行，就不十分明确，它往哪个方向飞呢？所以刻画速度时，既要有大小，还要有方向. 力、位移、加速度都属于这一类的量，这样的量就是“向量”.

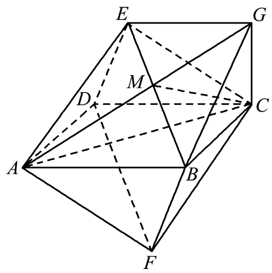

图 6-1

图 6-2

【知识正文】

6.1.1　空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

中学时就已经知道，通过平面直角坐标系，可以将平面上的点与一对有序实数对应起来，从而可用代数方法来讨论几何问题. 现将这种思想加以推广，引进空间直角坐标系，从而将空间中的点用一个有序数组来表示.

在空间中取定一点 O 作为原点，通过该点作三条相互垂直的数轴，分别记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**. 三个坐标轴上的单位长度通常都相同（这些长度单位也可以不同，但本章中，如无特别声明，则三个轴上都取相同的长度单位）. 通常将 x 轴和 y 轴置于水平面上，z 轴取铅直方向. 如图 6-3 所示，三个坐标轴的次序和方向按右手法则来确定. 即用右手握住 z 轴，四个手指从 x 轴的正向旋转 $90°$ 到 y 轴的正向时，拇指的指向就是 z 轴的正向.

由任意两条坐标轴所确定的平面称为**坐标面**. x 轴和 y 轴所在的平面称为 xOy 坐标面，另外两个坐标面分别是 yOz 坐标面和 zOx 坐标面. 如图 6-4 所示，三个坐标面将整个空间分为 8 个部分，每一部分称为一个**卦限**. 含有 x 轴、y 轴和 z 轴的正半轴的那个卦限称为第一卦限，其他第二、第三、第四卦限都在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五卦限在第一卦限下方，第六、第七、第八卦限也都在 xOy 面的下方，按逆时针方向确定. 这八个卦限分别用罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ来表示.

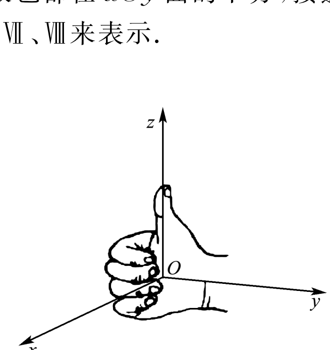

图 6-3

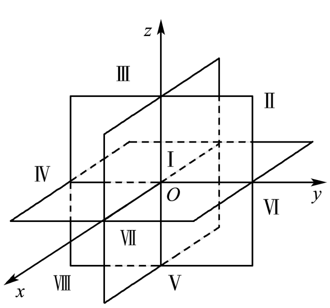

图 6-4

在上面建立的坐标系中,坐标轴、坐标面都是两两垂直的,故称之为**空间直角坐标系**.

2.空间点的坐标

如图 6-5 所示,设 M 为空间中的一点,过该点作三个分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面,它们与 x 轴、y 轴和 z 轴分别交于 P 点、Q 点和 R 点. 这三个点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x、y 和 z. 从而空间中的一点 M 就唯一确定了一个有序数组(x,y,z). 反之,给定一个有序数组(x,y,z),则可分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上取坐标为 x、y、z 的三个点 P、Q、R,过这三个点分别作一个与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面,这三个平面有唯一的交点,这个交点就是有序数组(x,y,z)所确定的点 M.

这样,利用空间直角坐标系,就在有序数组(x,y,z)与空间中的点 M 之间建立了一一对应关系. 有序数组(x,y,z)称为**点 M 的坐标**. 其中 x、y 和 z 分别称为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**. 在以后的表述中,常把一个点和表示这个点的坐标不加区别. 所说的给定一点,就是给定这个点的坐标;所说的求一个点,就是求一个点的坐标.

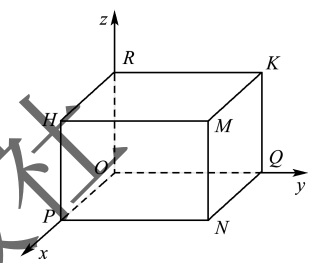

图 6-5

坐标面、坐标轴上的点的坐标有一定特点:

xOy 坐标面上的点的坐标为 $(x,y,0)$;yOz 坐标面上的点的坐标为 $(0,y,z)$;zOx 坐标面上的点的坐标为 $(x,0,z)$.

x 轴上的点的坐标为 $(x,0,0)$;y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$;z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$.

设 $M(x,y,z)$为空间中一点,从点 M 向 xOy 坐标面作垂线,设垂足为 N,则易知点 N 的坐标为$(x,y,0)$. 点 N 称为点 M 在 xOy 坐标面上的投影. 同理可知,点 $K(0,y,z)$ 和点 $H(x,0,z)$分别是 M 点在 yOz 坐标面与在 zOx 坐标面上的投影.

3.空间两点间的距离

若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点,如图 6-6 所示,可计算 M_1M_2 的距离为:

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$
$$=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2$$

而

$$|M_1P|=|x_2-x_1|$$
$$|PN|=|y_2-y_1|$$
$$|NM_2|=|z_2-z_1|$$

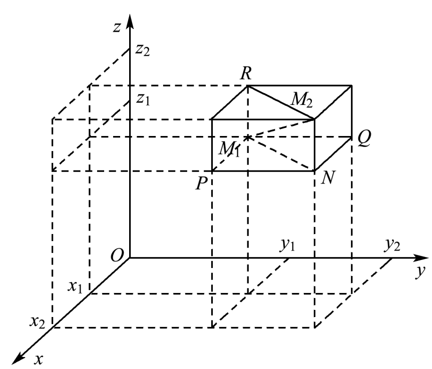

图 6-6

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特殊地,若两点分别为 $M(x,y,z)$, $O(0,0,0)$,则

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 1　求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证明
$$|M_1M_2|^2=(4-7)^2+(3-1)^2+(1-2)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6.$$

由于 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，所以原结论成立.

例 2　在 z 轴上求一点 M，使点 M 到点 $A(1,0,2)$ 和到点 $B(1,-3,1)$ 的距离相等.

解　因为所求的点 M 在 z 轴上，故可设点 M 的坐标为 $(0,0,z)$，根据题意，有

$$\sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(0+3)^2+(z-1)^2}$$

解得 $z=-3$，即点 M 的坐标是 $(0,0,-3)$.

6.1.2* 向量及其线性运算

1. 向量概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向.例如力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫做**向量**.

向量可用粗体字母表示，也可用上加箭头书写体字母表示.例如，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$.在几何上，通常用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量(如图 6-7 所示).有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向.如果线段的起点是 M_1，终点是 M_2，那么这个有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$.

在实际问题中，有些向量与起点有关(例如一个力与该力的作用点的位置有关)，有些向量与其起点无关.由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学上只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称**向量**.因此，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.相等的向量经过平移后可以完全重合.

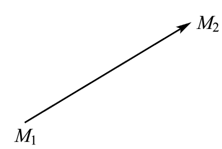

图 6-7

向量的大小叫做向量的**模**.向量 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$.模等于 1 的向量叫做**单位向量**.模等于 0 的向量叫做**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$.零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的.

如果两个非零向量的方向相同或相反，则称这两个向量**平行**.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.零向量认为是与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共的起点在一条直线上.因此，两向量平行又称两向量**共线**.

类似还有共面的概念.设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量**共面**.

2. 向量的线性运算

向量的加法　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 6-8 所示).

上述作出两向量之和的方法叫做向量加法的**三角形法则**.另一种求和的方法称为**平行四边形法则**：当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边

形，从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 6-9 所示).

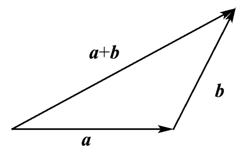

图 6-8

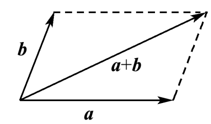

图 6-9

向量的加法符合运算规律：

(1)交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2)结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 $\boldsymbol{n}$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，并按向量相加的三角形法则，可得 $\boldsymbol{n}$ 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 6-10 所示，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$$

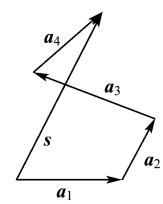

图 6-10

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$. 因此，规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(如图 6-11 所示).

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(如图 6-12 所示).

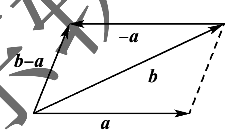

图 6-11

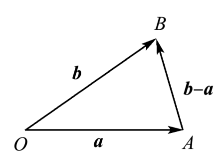

图 6-12

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

向量与数的乘法　向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm 1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律：

(1)结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2)分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的相加以及数乘向量统称为向量的**线性运算**.

例 3　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点(如图 6-13 所示).

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MA},$$

于是 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

因为 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $-\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$；$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

通常把与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记为 $\boldsymbol{e}_a$(如图 6-14 所示). 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，由数与向量乘积的定义，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a,\quad \boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

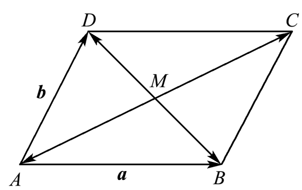

图 6-13

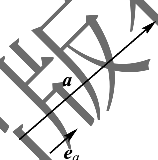

图 6-14

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量. 这一过程又称为将向量**单位化**.

由于 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此常用数与向量的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

再证明数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}，即 |\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

6.1.3* 利用坐标作向量的线性运算

1. 向量的坐标表示

把向量放在直角坐标系中讨论，就可以引进向量的坐标，这样向量与有序数组就联系起来，从而可以用代数的方法来研究向量.

在空间直角坐标系中，分别在三个坐标轴上取与 x,y,z 轴同方向的单位向量，称为**坐标向量**，分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 为空间的任意向量，将 $\boldsymbol{r}$ 平移使起点在坐标原点 O，终点 M 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$.

以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体(如图 6-15 所示),有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

显然 $\overrightarrow{OP}$ 是平行于 $\boldsymbol{i}$ 的,而且有 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$. 同理有 $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$. 因此可得

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

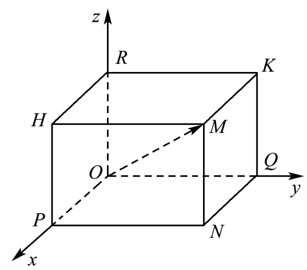

图 6-15

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**,$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**. 有序数 x、y、z 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**,记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标表达式**.

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明,一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M,又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

2. 利用坐标作向量的线性运算

利用向量在直角坐标系中的坐标表达式,就可以把向量的几何运算转化为代数运算. 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律以及向量与数的乘法的结合律与分配律,有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\
&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\
&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z).\\
\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\
&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\
&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z).\\
\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\
&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\
&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).
\end{aligned}$$

由此可见,对向量进行加、减及数乘运算,只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

由定理 1,向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,坐标表示式为 $(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$,也就相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例,于是 $\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$.

例 4 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$,其中 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$.

解 如同解二元一次线性方程组,可得

$$\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}.$$

以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式代入,即得

$$\boldsymbol{x}=2(2,1,2)-3(-1,1,-2)=(7,-1,10),$$
$$\boldsymbol{y}=3(2,1,2)-5(-1,1,-2)=(11,-2,16).$$

例 5 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$,在直线 AB 上求一点 M,使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

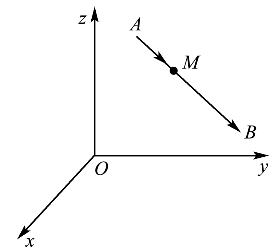

图 6-16

解　如图 6-16 所示，由于 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$，因此

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$$

$$=(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda})$$

这就是点 M 的坐标.

另解　设所求点为 $M(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$，$\overrightarrow{MB}=x_2-x,y_2-y,z_2-z$. 依题意有 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

$$(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)-\lambda(x,y,z),$$

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2),$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 当 $\lambda=1$，点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

6.1.4* 向量的模、方向角、投影

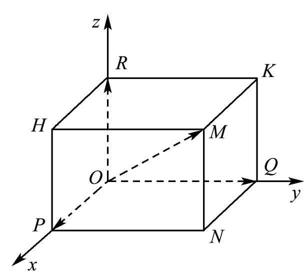

图 6-17

1. 向量的模

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$（如图 6-17 所示），则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2},$$

由 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，有 $|\overrightarrow{OP}|=|x|$，$|\overrightarrow{OQ}|=|y|$，$|\overrightarrow{OR}|=|z|$，于是得向量模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 6　已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}$.

解　因为

$$\overrightarrow{AB}=(7,1,3)-(4,0,5)=(3,1,-2),$$

所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14},$$

于是

$$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}).$$

2. 方向角与方向余弦

当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时，两个向量之间的不超过π的夹角称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作 $(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})$ 或 $(\boldsymbol{b},\hat{}\,\boldsymbol{a})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与π之间任意取值.

类似地，可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角.

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别记为 α、β、γ，称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**(如图 6-18 所示).

设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,\ y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,\ z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma.$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\ \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

从而 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r$.

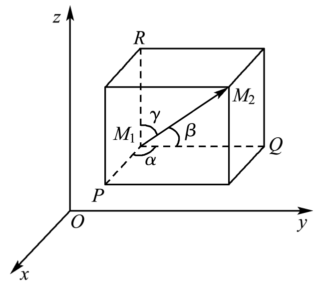

图 6-18

上式表明，以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$，因此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 7 设已知两点 $A(2,2,\sqrt{2})$ 和 $B(1,3,0)$，计算向量 $|\overrightarrow{AB}|$ 的模、方向余弦和方向角.

解
$$\overrightarrow{AB}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2});$$

所以
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2;$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{1}{2},\ \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

3. 向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴(如图 6-19 所示).

任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'(点 M' 叫作**点 M 在 u 轴上的投影**)，则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的**投影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$.

按此定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\ a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\ a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}.$$

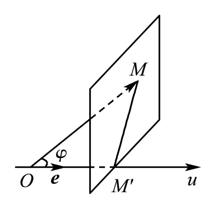

图 6-19

由此可知，向量的投影具有与坐标相同的性质：

性质 1 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角(如图 6-20 所示)；

性质 2 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$(如图 6-21 所示)；

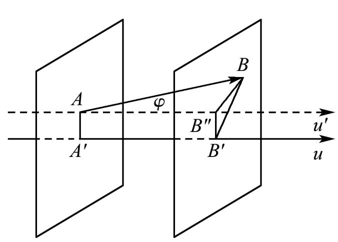

图 6-20

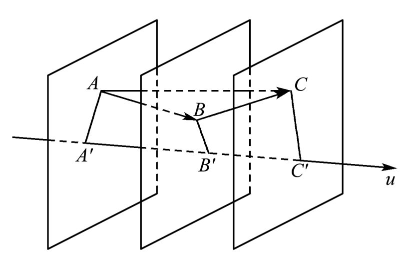

图 6-21

性质 3 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

【知识与能力拓展】

1. 上机演练：用 Mathematica 验证本节例 1.

2. 数学家简介

勒内·笛卡尔(一)


勒内·笛卡尔

勒内·笛卡尔 1596 年 3 月 31 日生于法国安德尔-卢瓦尔省的图赖讷(现笛卡尔，因笛卡尔得名)，1650 年 2 月 11 日逝世于瑞典斯德哥尔摩，是世界著名的法国哲学家、数学家、物理学家. 他对现代数学的发展做出了重要的贡献，因将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父. 他还是西方现代哲学思想的奠基人，是近代唯物论的开拓者且提出了“普遍怀疑”的主张. 黑格尔称他为“现代哲学之父”. 他的哲学思想深深影响了之后的几代欧洲人，开拓了所谓“欧陆理性主义”哲学. 堪称 17 世纪的欧洲哲学界和科学界最有影响的巨匠之一，被誉为“近代科学的始祖”.

笛卡尔 1 岁多时，母亲患肺结核去世，而他也受到传染，造成体弱多病. 但他学习成绩优异，老师便允许他不用早起运动. 而笛卡尔因而养成了利用这段时间冥想的习惯. 母亲去世后，父亲移居他乡并再婚，而把笛卡尔留给了他的外祖母带大，自此父子很少见面，但是父亲一直提供金钱方面的帮助，使他能够受到良好的教育.

笛卡尔 8 岁时就进入拉夫赖士(La Flèche)的耶稣英语会学校接受教育，受到良好的古典学以及数学训练. 1613 年到普瓦捷大学学习法律，1616 年毕业. 毕业后笛卡尔一直对职业选择不定，又决心游历欧洲各地，专心寻求“世界这本大书”中的智慧. 因此他于 1618 年在荷兰入伍，随军远游.

在笛卡尔的时代，拉丁文是学者的语言. 他也如当时的习惯，在他的著作上签上他的拉丁化的名字——Renatus Cartesius(瑞那图斯·卡提修斯). 正因为如此，他首创的直角坐标系也称卡提修坐标系(常称笛卡尔坐标系). 然而，笛卡尔用法文写作而不用拉丁文，这也表示当时拉丁文的欧洲学术语言地位正不断趋于废弃.

笛卡尔对数学与物理学的兴趣是在荷兰当兵期间产生的. 1618 年 11 月 10 日，他偶然在路旁公告栏上，看到用佛莱芒语提出的数学问题征答. 这引起了他的兴趣，并且让身旁的人将他不懂的佛莱芒语翻译成拉丁语. 这位身旁的人就是大他八岁的以撒·贝克曼(Isaac Beeckman). 贝克曼在数学和物理学方面有很高造诣，很快成为了他的心灵导师. 4 个月后，他写信给贝克曼：“你是将我从冷漠中唤醒的人……”，并且告诉他，自己在数学上有了 4 个重大发现.

1621 年，笛卡尔退伍.

1622 年，当他 26 岁时，笛卡尔变卖掉父亲留下的资产，用 4 年时间游历欧洲，其中在意大利住了 2 年，随后迁住于巴黎.

1628 年，笛卡尔移居荷兰，在那里住了 20 多年. 在此期间，笛卡尔专心致力于哲学研究，并

逐渐形成了自己的思想．他在荷兰写作且发表了多部重要的文集，包括《方法论》、《形而上学的沉思》(*Méditations métaphysiques*)和《哲学原理》(*Les Principes de la philosophie*)等．

1649 年，笛卡尔受瑞典克里斯蒂娜女王之邀来到斯德哥尔摩，但不幸在这片“熊、冰雪与岩石的土地”上得了肺炎，并在 1650 年 2 月去世．

1663 年，他的著作在罗马和巴黎被列入禁书之列．1740 年，巴黎才解除了禁令，那是为了对当时在法国流行起来的牛顿世界体系提供一个替代的东西．

他的哲学与数学思想对历史的影响是深远的．人们在他的墓碑上刻下了这样一句话：“笛卡尔，欧洲文艺复兴以来，第一个为人类争取并保证理性权利的人．”

人物轶事


克里斯蒂娜女王(左)和笛卡尔(右)

《数学的故事》里面说到了数学家笛卡尔的爱情故事．笛卡尔于 1596 年出生在法国，欧洲大陆爆发黑死病时他流浪到瑞典，认识了瑞典一个小公国 18 岁的公主克里斯蒂娜，后成为她的数学老师，日日相处使他们彼此产生爱慕之心，公主的父亲国王知道后勃然大怒，下令将笛卡尔处死，后因女儿求情将其流放回法国，克里斯蒂娜公主也被父亲软禁起来．笛卡尔回法国后不久便染上重病，他日日给公主写信，因被国王拦截，克里斯蒂娜一直没收到笛卡尔的信．笛卡尔在给克里斯蒂娜寄出第十三封信后就气绝身亡了，这第十三封信内容只有短短的一个公式：$r=a(1-\sin\theta)$．国王看不懂，觉得他们俩之间并不是总是说情话的，就大发慈悲把这封信交给一直闷闷不乐的克里斯蒂娜，公主看到后，立即明了了恋人的意图，她马上着手把方程的图形画出来，看到图形，她开心极了，她知道恋人仍然爱着她，原来方程的图形是一颗心的形状．这也就是著名的“心形线”．

国王死后，克里斯蒂娜登基，立即派人在欧洲四处寻找心上人，无奈斯人已故，先她走一步了，徒留她孤零零地在人间……

据说这封享誉世界的另类情书还保存在欧洲笛卡尔的纪念馆里．

但事实是在历史上，笛卡尔和克里斯蒂娜的确有过交情．但笛卡尔是 1649 年 10 月 4 日应克里斯蒂娜邀请才来到瑞典，而当时克里斯蒂娜已成为了瑞典女王．笛卡尔与克里斯蒂娜谈论的主要是哲学问题而不是数学．有资料记载，由于克里斯蒂娜女王时间安排得很紧，笛卡尔只能在早晨五点与她探讨哲学．笛卡尔真正的死因是因天气寒冷加上过度操劳患上的肺炎，而不是黑死病．

【学习效果评估】

(A)

1. 填空题

(1)已知某向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，方向相反，且 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{b}$ 由 $\boldsymbol{a}$ 表示为____________．

(2)已知梯形 $OABC$，$\overrightarrow{CB}\ /\!/\ \overrightarrow{OA}$ 且 $|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$，若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AB}=$

______________.

(3)一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4,-4$ 和 7，则这向量的起点 A 的坐标为______________.

(4)设向量的模是 4，它与轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，则它在轴上的投影为______________.

(5)已知 $A(4,0,5)$，$B(7,1,3)$，则 $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=$______________.

2. 一向量的起点为 $A(1,4,-2)$，终点为 $B(-1,5,0)$，求它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影，并求 $|\overrightarrow{AB}|$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,5,4)$，$\boldsymbol{b}=(-6,1,2)$，$\boldsymbol{c}=(0,-3,-4)$，求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 及其单位向量.

4. 一向量与 x 轴，y 轴的夹角相等，而与 z 轴的夹角是前者的两倍，求该向量的方向角.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴成相等的锐角，求它的方向余弦，若 $|\boldsymbol{a}|=2$，求向量的坐标.

6. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

7. 已知两向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda,5,-1)$，$\boldsymbol{b}=(3,1,\mu)$ 平行，求 λ,μ 的值.

8. 下列各点在坐标系中的位置有何特殊性？

$A(-2,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,-5)$，$D(0,1,-2)$，$E(3,0,1)$，$F(2,-1,0)$.

9. 写出下列各点关于坐标面对称点的坐标.

(1) $(1,2,3)$，关于 xOy 坐标面；

(2) $(-1,2,1)$，关于 yOz 坐标面；

(3) $(0,1,2)$，关于 zOx 坐标面.

10. 在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

11. 求证以 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

12. 在空间直角坐标系中，标出下列各点的位置：

$$A(1,2,3),B(3,4,0),C(2,-3,-4),D(0,1,-1).$$

13. 求点 $A(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

14. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$、$C(0,5,1)$ 等距离的点.

15. 求出点 $A(2,-1,3)$ 关于原点、三个坐标轴、三个坐标面的对称点的坐标.

16. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，底面中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求各顶点的坐标.

17. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

18. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角以及和 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向一致的单位向量.

(C)

案例　北京“水立方”的长和宽都为 177 米，高为 31 米，若以其几何中心为空间直角坐标系的原点，且水立方的各个外表面分别平行于 3 个坐标面，求水立方的 8 个顶点的坐标.

6.2* 数量积 向量积

本节主要介绍向量的数量积和向量积.

【知识目标】

理解两个向量的数量积和向量积的概念.

【能力目标】

会计算向量的数量积,会利用向量的向量积求面积.

【案例引入】

引例 1 一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2. 以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$(如图 6-22所示). 由物理学知道,力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 等于力 $\boldsymbol{F}$ 在位移方向上的分力$|\boldsymbol{F}|\cos\theta$($\theta$ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角)乘以位移的大小$|\boldsymbol{s}|$,即

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

由此可见,功的数量是由 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 这两个向量所唯一确定的. 在物理学和力学的其它问题中,也常常会遇到此类情况. 为此,在数学中把这种运算抽象成两个向量的数量积的概念.

引例 2 在研究物体的转动问题时,不但要考虑此物体所受的力,还要分析这些力所产生的力矩. 设 O 为一根杠杆 L 的支点. 有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆上 P 点处. $\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ(如图 6-23 所示). 由力学规定,力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$,它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{M}$ 的指向是按右手规则从$\overrightarrow{OP}$ 以不超过π的角转向 $\boldsymbol{F}$ 来确定的,即当右手的四个手指从$\overrightarrow{OP}$ 以不超过超过π的角转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时,大拇指的指向就是 $\boldsymbol{M}$ 的指向(如图 6-24 所示).

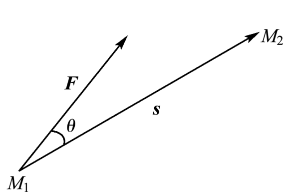

图 6-22

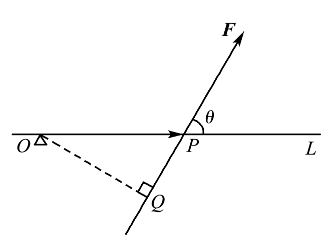

图 6-23

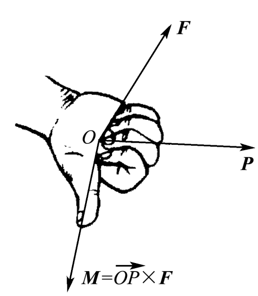

图 6-24

根据这种由两个已知向量按上面的规则来确定另一个向量的运算,在数学中抽象出两向量的向量积的概念.

【知识正文】

6.2.1　两向量的数量积

定义 1　设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的模 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（或称**内积**、**点积**），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

引例 1 中常力所作的功就是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

同理，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

这就是说，两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在该向量的方向上的投影的乘积.

根据数量积的定义，可以推得

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

如果认为零向量与任何向量都垂直，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积满足下列运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

证明　因为当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，上式显然成立；当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda$、$\mu$ 为数.

例 1　试用向量证明三角形的余弦定理.

证明　设在 ΔABC 中，$\angle BCA=\theta$（如图 6-25 所示），$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，要证

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

记 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，则有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

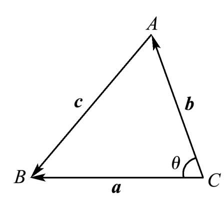

图 6-25

从而

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\cos\theta.$$

下面利用数量积的性质和运算规律来推导数量积的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

设 $\theta=(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$,则当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,根据 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

例 2 已知三点 $M(1,1,1)$,$A(2,2,1)$和 $B(2,1,2)$,求$\angle AMB$.

解 从 M 到 A 的向量记为 $\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$,从 M 到 B 的向量记为 $\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{b}=(1,0,1)$,从而$\angle AMB$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times0+0\times1=1,\ |\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\ |\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

所以
$$\cos\angle AMB=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

从而
$$\angle AMB=\frac{\pi}{3}.$$

6.2.2 两向量的向量积

定义 2 设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出:

(1)$\boldsymbol{c}$ 的模为 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角;

(2)$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定(如图 6-26 所示).

那么,向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(或称**外积**、**叉积**),记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

根据向量积的定义,力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于$\overrightarrow{OP}$与 $\boldsymbol{F}$ 的向量积,即 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

根据向量积定义,可以推得

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(2)对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$,如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;反之,如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

如果认为零向量与任何向量都平行,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

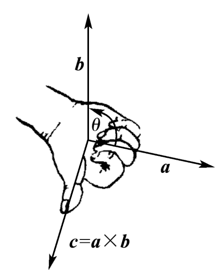

图 6-26

向量积满足下列运算律:

(1)交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2)分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(3)$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (λ 为数).

下面利用向量积的性质和运算规律来推导向量积的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$.按向量积的运算规律可得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_x b_x \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} + a_x b_y \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} + a_x b_z \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} \\
&\quad + a_y b_x \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + a_y b_y \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} + a_y b_z \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} \\
&\quad + a_z b_x \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + a_z b_y \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} + a_z b_z \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\boldsymbol{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\boldsymbol{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\boldsymbol{k}.$$

为了帮助记忆，利用三阶行列式符号，上式可写成

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z \boldsymbol{i} + a_z b_x \boldsymbol{j} + a_x b_y \boldsymbol{k} - a_y b_x \boldsymbol{k} - a_x b_z \boldsymbol{j} - a_z b_y \boldsymbol{i} \\
&= (a_y b_z-a_z b_y)\boldsymbol{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\boldsymbol{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

例 3　设 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,2)$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$

例 4　已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1,2,3)$、$B(3,4,5)$、$C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积.

解　根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积为

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

于是

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

【知识与能力拓展】

1. 上机演练：用 Mathematica 验证本节例 4.
2. 数学家简介

勒内·笛卡尔(二)——人物成就

哲学

笛卡尔被广泛认为是西方近代哲学的奠基人，他第一个创立了一套完整的哲学体系. 哲学上，笛卡尔是一个二元论者以及理性主义者. 笛卡尔认为，人类应该可以使用数学的方法——也就是理性——来进行哲学思考. 他相信，理性比感官的感受更可靠. 他从逻辑学、几何学和代数学中发现了 4 条规则：

(1)除了清楚明白的观念外，绝不接受其他任何东西；

(2)必须将每个问题分成若干个简单的部分来处理；

(3)思想必须从简单到复杂；

(4)我们应该时常进行彻底的检查，确保没有遗漏任何东西.

笛卡尔将这种方法不仅运用在哲学思考上,还运用于几何学,并创立了解析几何. 由此,笛卡尔第一步就主张对每一件事情都进行怀疑,而不能信任我们的感官. 从这里他悟出一个道理:他必须承认的一件事就是他自己在怀疑. 而当人在怀疑时,他必定在思考,由此他推出了著名的哲学命题——“我思故我在”. 笛卡尔将此作为形而上学中最基本的出发点,从这里他得出结论,“我”必定是一个独立于肉体的、在思维的东西. 笛卡尔还试图从该出发点证明出上帝的存在. 笛卡尔认为,我们都具有对完美实体的概念,由于我们不可能从不完美的实体上得到完美的概念,因此有一个完美实体——既上帝——必定存在. 从所得到的两点出发,笛卡尔再次证明,现实世界中有诸多可以用理性来察觉的特性,既它们的数学特性(如长、宽、高等),当我们的理智能够清楚地认知一件事物时,那么该事物一定不会是虚幻的,必定是如同我们所认知的那样.

笛卡尔的手稿

虽然笛卡尔证明了真实世界的存在,他认为宇宙中共有两个不同的实体,即精神世界和物质世界(“灵魂”和“扩延”),两者本体都来自于上帝,而上帝是独立存在的. 他认为,只有人才有灵魂,人是一种二元的存在物,既会思考,也会占空间,而动物只属于物质世界.

笛卡尔强调思想是不可怀疑的这个出发点,对此后的欧洲哲学产生了重要的影响. 但是它的基础“我思故我在”被后人证明是并不十分可靠的,因为该公式其实是建基于承认思想是一个自我意识这一隐蔽着的假设上的,如果摈弃了自我意识,那么笛卡尔的论证就失败了. 而笛卡尔证明上帝存在的论点,也下得很匆忙.

笛卡尔强调科学的目的在于造福人类,使人成为自然界的主人和统治者. 他反对经院哲学和神学,提出怀疑一切的“系统怀疑的方法”. 但他还提出了“我思故我在”的原则,强调不能怀疑以思维为其属性的独立的精神实体的存在,并论证以广延为其属性的独立物质实体的存在. 他认为上述两实体都是有限实体,把它们并列起来,这说明了在形而上学或本体论上,他是典型的二元论者. 笛卡尔还企图证明无限实体,即上帝的存在. 他认为上帝是有限实体的创造者和终极的原因. 笛卡尔的认识论基本上是唯心主义的. 他主张唯理论,把几何学的推理方法和演绎法应用于哲学上,认为清晰明白的概念就是真理,提出“天赋观念”.

笛卡尔的自然哲学观同亚里士多德的学说是完全对立的. 他认为,所有物质的东西,都是为同一机械规律所支配的机器,甚至人体也是如此. 同时他又认为,除了机械的世界外,还有一个精神世界存在,这种二元论的观点后来成了欧洲人的根本思想方法.

物理学

笛卡尔靠着天才的直觉和严密的数学推理, 在物理学方面做出了有益的贡献. 从 1619 年读了开普勒的光学著作后,笛卡尔就一直关注着透镜理论;并从理论和实践两方面参与了对光的本质、反射与折射率以及磨制透镜的研究. 他把光的理论视为整个知识体系中最重要的部分.

笛卡尔运用他的坐标几何学从事光学研究,在《屈光学》中第一次对折射定律提出了理论上

的推证. 笛卡尔发现了动量守恒原理. 他还发展了宇宙演化论、漩涡说等理论学说,虽然具体理论有许多缺陷,但依然对以后的自然科学家产生了影响. 他认为光是压力在以太中的传播,他从光的发射论的观点出发,用网球打在布面上的模型来计算光在两种媒质分界面上的反射、折射和全反射,从而首次在假定平行于界面的速度分量不变的条件下导出折射定律. 不过他的假定条件是错误的,他的推证得出了光由光疏媒质进入光密媒质时速度增大的错误结论. 他还对人眼进行光学分析,解释了视力失常的原因是晶状体变形,设计了矫正视力的透镜. 在力学上,笛卡尔发展了伽利略的运动相对性的思想,例如在《哲学原理》一书中,举出在航行中的海船上海员怀表的表轮这一类生动的例子,用以说明运动与静止需要选择参照物的道理.

笛卡尔在《哲学原理》第二章中以第一和第二自然定律的形式比较完整地第一次表述了惯性定律:只要物体开始运动,就将继续以同一速度并沿着同一直线方向运动,直到遇到某种外来原因造成的阻碍或偏离为止. 这里他强调了伽利略没有明确表述的惯性运动的直线性. 在这一章中,他还第一次明确地提出了动量守恒定律:物质和运动的总量永远保持不变. 笛卡尔对碰撞和离心力等问题曾作过初步研究,给后来惠更斯的成功创造了条件.

天文学

笛卡尔把他的机械论观点应用到天体,发展了宇宙演化论,形成了他关于宇宙发生与构造的学说. 他认为,从发展的观点来看而不只是从已有的形态来观察,对事物更易于理解. 他创立了漩涡说. 他认为太阳的周围有巨大的漩涡,带动着行星不断运转. 物质的质点处于统一的漩涡之中,在运动中分化出土、空气和火三种元素,土形成行星,火则形成太阳和恒星. 他认为天体的运动来源于惯性和某种宇宙物质旋涡对天体的压力,在各种大小不同的旋涡的中心必有某一天体,以这种假说来解释天体间的相互作用.

笛卡尔的太阳起源的以太旋涡模型第一次依靠力学而不是神学,解释了天体、太阳、行星、卫星、彗星等的形成过程,比康德的星云说早一个世纪,是 17 世纪中最有权威的宇宙论.

笛卡尔的天体演化说、旋涡模型和近距作用观点,正如他的整个思想体系一样,一方面以丰富的物理思想和严密的科学方法为特色,起着反对经院哲学、启发科学思维、推动当时自然科学前进的作用,对许多自然科学家的思想产生深远的影响;而另一方面又经常停留在直观和定性阶段,不是从定量的实验事实出发,因而一些具体结论往往有很多缺陷,成为后来牛顿物理学的主要对立面,导致了广泛的争论.

【学习效果评估】

(A)

1. 填空题

(1)已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$____________.

(2)若向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 共线,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$,则 $\boldsymbol{b}=$____________.

(3)已知 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=5$,问 $\lambda=$____________时,$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$ 相互垂直.

(4)已知 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=3$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$,则 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=$____________.

(5)已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,且 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=12$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$____________, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$____________.

(6)向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 两两垂直,且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$,则 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的长度

为______________.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,0,1)$. 试求：

(1)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；　(2)$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=36$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

4. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　(2)$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；　(3)$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

5. 求 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

6. 已知 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$，求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

7. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 ΔOAB 的面积.

6.3　曲面及其方程

本节主要介绍曲面方程的概念和一些常见的曲面方程.

【知识目标】

理解曲面方程的概念.

【能力目标】

会求给定条件下的几种曲面方程，包括球面、旋转曲面和柱面.

【案例引入】

引例　在现实生活中，曲面比比皆是，如图 6-27 所示的水桶表面和台灯罩表面都是曲面，那么如何用代数方法来研究这些曲面呢？

图 6-27

【知识正文】

6.3.1　曲面方程的概念

水桶表面、台灯罩表面等曲面在空间解析几何中被看成是点的几何轨迹.

1. 曲面方程的定义

如图 6-28 所示，如果曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{6-1}$$

有下述关系：

(1)曲面 S 上任一点的坐标都满足方程(6-1).

(2)不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程(6-1).

那么，方程(6-1)就叫做**曲面 S 的方程**，而曲面 S 就叫做**方程(6-1)的图形**.

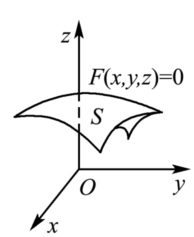

图 6-28

2. 几种常见曲面

(1)球面

例 1　建立球心在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 R 的球面的方程.

解　如图 6-29 所示，设 $M(x,y,z)$ 是球面上的任意一点，那么

$$|M_0M|=R.$$

即 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R.$$

或 $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

特别地，如果球心在原点，那么球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

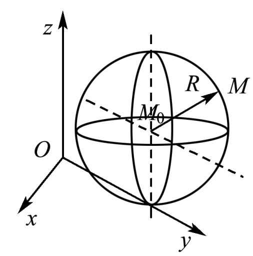

图 6-29

例 2　方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面？

解　通过配方，原方程可以改写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5.$$

这是一个球面方程，球心在点 $M_0(1, -2, 0)$，半径 $R=\sqrt{5}$.

一般地，设有三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0,$$

这个方程的特点是缺 xy，yz，zx 各项，而且平方项系数相同，只要将方程经过配方就可以化成方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

的形式，且 $R>0$，它的图形就是一个球面.

(2)线段的垂直平分面(平面方程)

例 3　设有点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解　由题意知道，所求平面为与 A 和 B 等距离的点的轨迹，设 $M(x,y,z)$ 是所求平面上的任意一点，由于 $|MA|=|MB|$，那么

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}.$$

化简得所求方程为

$$2x-6y+2z-7=0.$$

一般地，方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

表示一个平面，称该方程为**平面的一般方程**，如 $4x-2y+2z+9=0$ 就表示一个平面.

例 4　设一平面与 x，y，z 轴的交点依次为 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$ 和 $R(0,0,c)$ 三点，如图6-30所示，求此平面的方程.(其中 $a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$)

解　设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$. 代入 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$ 和 $R(0,0,c)$ 得

$$A=-D/a, B=-D/b, C=-D/c,$$

代入方程并消去 D 得平面方程：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

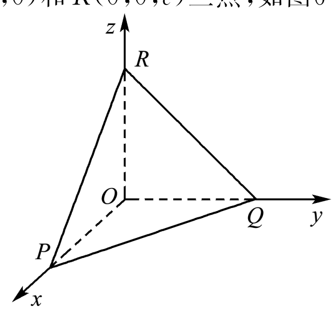

图 6-30

此方程称为**平面的截距式方程**，a，b，c 依次称为平面在 x，y，z 轴上的**截距**.

对于前面例 2 得到的平面 $2x-6y+2z-7=0$，移项得 $2x-6y+2z=7$，再整理得 $\frac{2}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z=1$，所以该平面的截距分别是 $\frac{7}{2}$，$-\frac{7}{6}$，$\frac{7}{2}$.

6.3.2 旋转曲面

定义 1 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做**旋转曲面**，该平面曲线和定直线依次叫旋转曲面的**母线**和**轴**.

下面推导旋转曲面的方程.

设在 yOz 面上有一已知曲线 C，如图 6-31 所示，它的方程为 $f(y,z)=0$，把这曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面. 在所形成的旋转曲面上任取一点 $M(x,y,z)$，总可以在曲线 C 上找到与其对应的一点 $M_1(0,y_1,z_1)$（点 M 由点 M_1 绕 z 轴旋转而得），只需要找到 x,y,z 所满足的方程，即为所求的旋转曲面的方程. 由于点 M_1 在曲线 C 上，所以 $f(y_1,z_1)=0$. 而 $z_1=z$，且点 M 到 z 轴的距离 $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$，将 $z_1=z$，$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入 $f(y_1,z_1)=0$，有

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

这就是旋转曲面的方程. 即在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

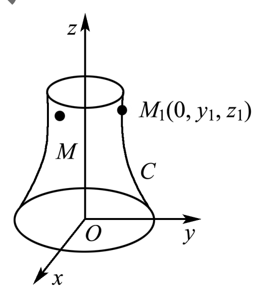

图 6-31

例 5 将 zOx 坐标面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解 绕 z 轴旋转所在的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

绕 x 轴旋转所在的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$$

这两种曲面分别叫做**(旋转)单叶双曲面**(如图 6-32 所示)和**(旋转)双叶双曲面**(如图 6-33 所示).

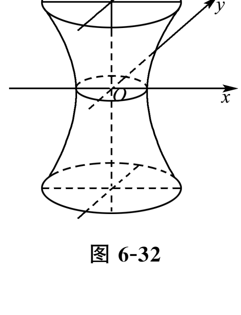

图 6-32

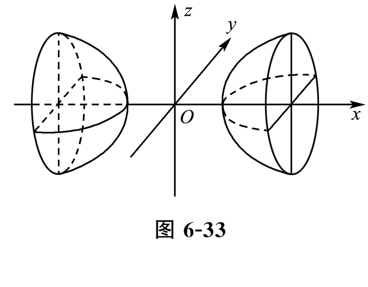

图 6-33

例 6　直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫做**圆锥面**. 两直线的交点叫做圆锥面的**顶点**，两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$叫做圆锥面的**半顶角**. 试建立顶点在坐标原点 O，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面的方程.

解　如图 6-34 所示，在 yOz 坐标面内，直线 L 的方程为

$$z=y\cot\alpha.$$

将方程 $z=y\cot\alpha$ 中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，就得到所要求的圆锥面的方程

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$$

或 $z^2=a^2(x^2+y^2)$，其中 $a=\cot\alpha$.

上式即为一种常用旋转曲面——锥面的方程.

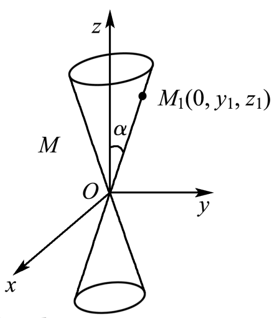

图 6-34

6.3.3　柱面

例 7　方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面？

解　方程 $x^2+y^2=R^2$ 在 xOy 面上表示圆心在原点 O、半径为 R 的圆. 在空间直角坐标系中，这方程不含竖坐标 z，即不论空间点的竖坐标 z 怎样，只要它的横坐标 x 和纵坐标 y 能满足这方程，这些点就在这曲面上. 也就是说，过 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$，且平行于 z 轴的直线一定在 $x^2+y^2=R^2$ 表示的曲面上. 所以这个曲面可以看成是由平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而形成的. 这个曲面叫做**圆柱面**，如图 6-35 所示，xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 叫做它的**准线**，平行于 z 轴的直线 l 叫做它的**母线**.

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做**柱面**，定曲线 C 叫做柱面的**准线**，动直线 L 叫做柱面的**母线**.

由此可见，不含 z 的方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间直角坐标系中表示圆柱面，它的母线平行于 z 轴，它的准线是 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$.

一般地，只含 x、y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 面上的曲线 C：$F(x,y)=0$.

例如，方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，它的准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$，该柱面叫做抛物柱面，如图 6-36 所示.

又如，方程 $x-y=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 面的直线 $x-y=0$，所以它是过 z 轴的平面，如图 6-37 所示.

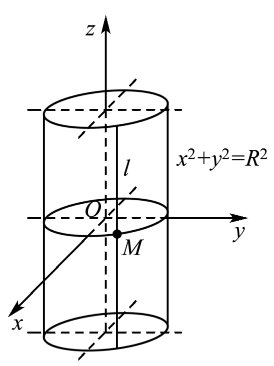

图 6-35

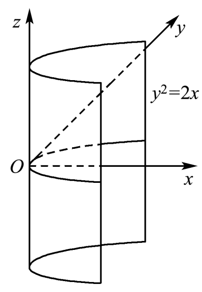

图 6-36

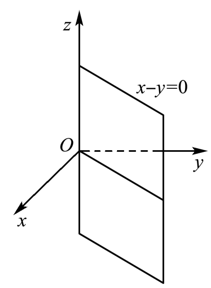

图 6-37

类似地，只含 x,z 而缺 y 的方程 $G(x,z)=0$ 和只含 y,z 而缺 x 的方程 $H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

例如,方程 $x-z=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面，其准线是 zOx 面上的直线 $x-z=0$. 所以它是过 y 轴的平面.

6.3.4 二次曲面

与平面解析几何中的二次曲线相类似，把三元二次方程所表示的曲面叫做**二次曲面**. 把平面叫做一次曲面.

怎样了解三元方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面的形状呢? 方法之一是用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线的形状，然后加以综合，从而了解曲面的立体形状. 这种方法叫做**截痕法**.

研究曲面的另一种方法是**伸缩变形法**.

平面 xOy 上的图形的伸缩变形:将平面上的点 $M(x,y)$变为点 $M'(x,\lambda y)$,此时点 $M(x,y)$的轨迹 C 变为点 $M'(x,\lambda y)$的轨迹 C',称将图形 C 沿 y 轴方向伸缩 λ 倍变成图形 C'.

下面讨论 C 与 C'的方程关系：

设 C 的方程为 $F(x,y)=0$,点 $M(x_1,y_1)\in C$,将 $M(x,y)$变为 $M'(x_2,y_2)$,此时,$x_2=x_1,y_2=\lambda y_1 \Rightarrow x_1=x_2,y_1=\dfrac{1}{\lambda}y_2$.

由 $M(x_1,y_1)\in C \Rightarrow F(x_1,y_1)=0 \Rightarrow F(x_2,\dfrac{1}{\lambda}y_2)=0$,因此 $M'(x_2,y_2)$的轨迹 C'的方程为：$F(x,\dfrac{1}{\lambda}y)=0$.

例如将圆 $x^2+y^2=a^2$ 沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍,则圆的方程变为：

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2,\text{即}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

即图形由圆变为椭圆(如图 6-38 所示).

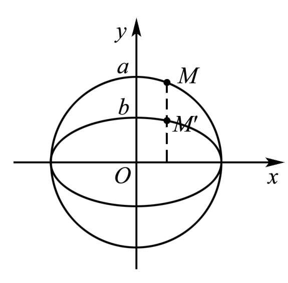

图 6-38

设 S 是一个曲面，其方程为 $F(x,y,z)=0$,S'是将曲面 S 沿 y 轴方向伸缩 l 倍所得的曲面.

显然，若$(x,y,z)\in S$，则$(x,ly,z)\in S'$；若$(x,y,z)\in S'$，则 $(x,\dfrac{1}{\lambda}y,z)\in S$.

因此，对于任意的$(x,y,z)\in S'$，有 $F(x,\dfrac{1}{\lambda}y,z)=0$，即 $F(x,\dfrac{1}{\lambda}y,z)=0$ 是曲面 S'的方程.

例如,把圆锥面 $x^2+y^2=a^2z^2$ 沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，所得曲面的方程为

$$x^2+\left(\frac{a}{b}y\right)^2=a^2z^2,\ \text{即}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2.$$

下面介绍九种二次曲面.

1. 椭圆锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

先通过截痕法了解曲面的形状.

如图 6-39 所示，以平面 $z=t$ 截曲面：

当 $t=0$ 时，得一点$(0,0,0)$. 当 $t\neq 0$ 时，得平面 $z=t$ 上的椭圆：

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1;$$

当$|t|$从大到小变为 0 时，椭圆从大到小收缩为一点，如图 6-39 所示.

平面 $z=t$ 与曲面 $F(x,y,z)=0$ 的交线称为**截痕**.

下面用伸缩变形法讨论曲面的形状.

2. 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

将 xOz 平面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转得**旋转椭球面：**$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

再将旋转椭球面沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，得**椭球面：**$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，如图 6-40 所示.

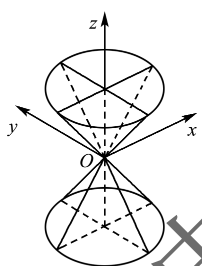

图 6-39

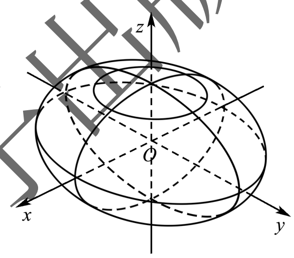

图 6-40

当 $a=b=c$ 时，椭球面变为**球面：**$x^2+y^2+z^2=a^2$.

3. 单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

将 xOz 平面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转得**旋转单叶双曲面：**$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，如图 6-41 所示.

再将旋转单叶双曲面沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，得**单叶双曲面：**$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

4. 双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

将 xOz 平面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转得**旋转双叶双曲面：**$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$，如图 6-42 所示.

再将旋转双叶双曲面沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{c}$ 倍，得**双叶双曲面：**$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

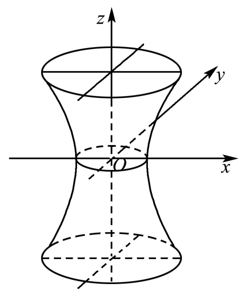

图 6-41

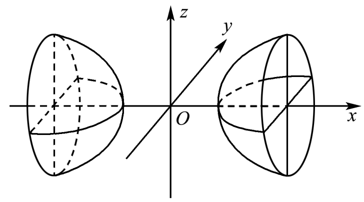

图 6-42

5. 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

将 xOz 平面上的抛物线 $\frac{x^2}{a^2}=z$ 绕 z 轴旋转得**旋转抛物面**：$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z$，如图 6-43 所示.

再将旋转抛物面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，得**椭圆抛物面**：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$.

6*. 双曲抛物面(马鞍面)：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

如图 6-44 所示，用截痕法分析：

用平面 $x=t$ 截曲面，截痕 l 为平面 $x=t$ 上的抛物线：$-\frac{y^2}{b^2}=z-\frac{t^2}{a^2}$，此抛物线开口朝下，顶点坐标为：

$$x=t,\quad y=0,\quad z=\frac{t^2}{a^2}.$$

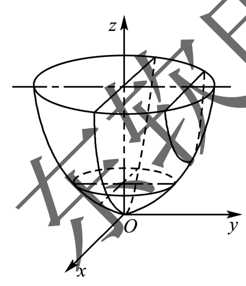

图 6-43

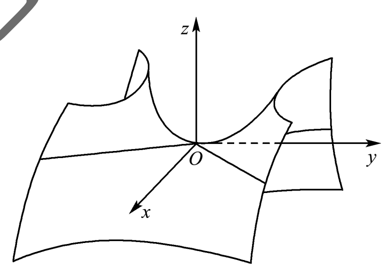

图 6-44

当 t 变化时，l 的形状不变，位置平移，而顶点的轨迹为平面 $y=0$ 上的抛物线 L：$z=\frac{t^2}{a^2}$.

因此，双曲抛物面为以 l 为母线，以 L 为准线，母线的顶点在准线 L 上作平行移动得到的曲面.

7. 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，如图 6-45 所示.

8. 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，如图 6-46 所示.

9. 抛物柱面：$y^2=ax$，如图 6-47 所示.

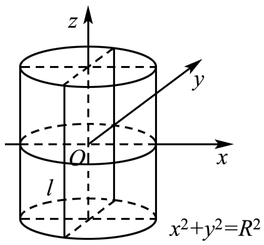

图 6-45

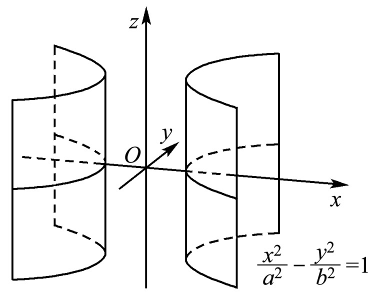

图 6-46

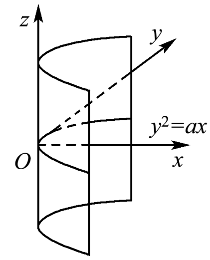

图 6-47

例 8　说明下列旋转曲面是怎样形成的：

(1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$；　　　(2) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{2}$.

解　(1)xOy 面上的双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 x 轴旋转一周；或 zOx 面上的双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ 绕 x 轴旋转一周.

(2)xOy 面上的抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$ 绕 y 轴旋转一周；或 yOz 面上的抛物线 $y=\frac{z^2}{2}$ 绕 y 轴旋转一周.

【知识与能力拓展】

1. 上机演练：用 Mathematica 软件画出本节所涉及的二次曲面图形.

2. 数学家简介

勒内 · 笛卡尔(三)

数学

笛卡尔最杰出的成就是在数学发展上创立了解析几何学. 在笛卡尔时代，代数还是一个比较新的学科，几何学的思维还在数学家的头脑中占有统治地位. 笛卡尔致力于将代数和几何联系起来的研究，于 1637 年创立了坐标系后，成功地创立了解析几何学. 他的这一成就为微积分的创立奠定了基础. 解析几何直到现在仍是重要的数学方法之一. 此外，现在使用的许多数学符号都是笛卡尔最先使用的，这包括了已知数 a,b,c 以及未知数 x，y，z 等，还有指数的表示方法. 他还发现了凸多面体边、顶点、面之间的关系，后人称为欧拉-笛卡尔公式. 还有积分中常见的笛卡尔叶形线也是他发现的.

解析几何的创立

据说有一天，笛卡尔生病卧床，病情很重，尽管如此他还反复思考一个问题：几何图形是直观的，而代数方程是比较抽象的，能不能把几何图形和代数方程结合起来，也就是说能不能用几何图形来表示方程呢？要想达到此目的，关键是如何把组成几何图形的点和满足方程的每一组"数"挂上钩，他苦苦思索，拼命琢磨，通过什么样的方法，才能把"点"和"数"联系起来. 突然，他看见屋顶角上的一只蜘蛛，拉着丝垂了下来. 一会功夫，蜘蛛又顺这条丝爬上去，在上边左右拉丝. 蜘蛛的"表演"使笛卡尔的思路豁然开朗. 他想，可以把蜘蛛看作一个点. 他在屋子里可以上、下、左、右运动，能不能把蜘蛛的每一个位置用一组数确定下来呢？他又想，屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条线，如果把地面上的墙角作为起点，把交出来的三条线作为三根数轴，那

么空间中任意一点的位置就可以在这三根数轴上找到有顺序的三个数.反过来,任意给一组三个有顺序的数也可以在空间中找到一点 P 与之对应.同样道理,用一组数 (x,y) 可以表示平面上的一个点,平面上的一个点也可以用一组两个有顺序的数来表示,这就是坐标系的雏形.

【学习效果评估】

(A)

1.填空题

(1)以点(1,2,3)为球心,且过点(0,0,1)的球面方程是________.

(2)将 zOx 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面方程是________.

(3)将 xOy 坐标面上的圆 $x^2+(y-1)^2=2$ 绕 y 轴旋转一周所生成的球面方程是________,且球心坐标是________,半径为________.

(4)方程 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}=0$ 表示旋转曲面,它的旋转轴是________.

(5)方程 $y^2=z$ 在平面解析几何中表示________,在空间解析几何中表示________.

(6)yOz 坐标面上 $z^2=y$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面方程是________.

(7)xOy 坐标面上 $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面方程是________.

2.写出以点 $(1,3,-2)$ 为球心,且通过坐标原点的球面方程.

3.求与坐标原点 O 及点 $(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的点的全体所组成的曲面的方程,它表示怎样的曲面?

4.将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周,求所形成的旋转曲面方程.

5.将 zOx 坐标面上的抛物线 $z=x^2$ 分别绕 x 轴及 z 轴旋转一周,求所形成的旋转曲面方程.

6.写出下列曲面方程的名称,并画出曲面的草图.

(1) $(x-a)^2+y^2=a^2$　　(2)$x^2=4y$　　(3)$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$　　(4)$y^2-z=0$

7.指出下列方程表示什么曲面并画出其图形.

(1)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$　　(2)$x=\frac{y^2}{4}+z^2$

(3)$(y-1)^2=x^2+4z^2$　　(4)$z=2-x^2-y^2$

8.画出下列各曲面所围成的立体区域.

(1)$x=0,y=0,x=1,y=1,z=0,x+2y+3z=1$

(2)$x^2+y^2=1,z=0,z=1$

(3)$x=0,y=0,x+y=1,z=0,z=3-x^2-y^2$

9.一动点与两定点 $(2,3,1)$ 和 $(4,5,6)$ 等距离,求动点的轨迹方程.

10.方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面?

(C)

案例　找一个可口可乐的玻璃瓶,先利用曲线拟合的方法得出其母线的方程,再利用旋转

曲面的知识写出其外表面的的曲面方程.

6.4　空间曲线及其方程

本节主要介绍空间曲线及其方程的概念.

【知识目标】

理解空间曲线的一般方程和参数式方程,理解空间直线的一般方程.

【能力目标】

能够空间想象并画出由两个曲面相交所确定的空间曲线的形状,能够空间想象并画出由两个平面相交所确定的空间直线的形状.

【案例引入】

引例　如图 6-48 所示,螺丝钉的螺纹外缘曲线是螺旋线,当外力拧紧或拧松螺丝钉时,它们的外缘曲线上的任一点,将一方面绕螺丝钉的轴旋转,另一方面又沿平行于轴线的方向前进,该点走过的轨迹就是螺旋线.那么螺旋线该如何用方程来进行描述呢?

图 6-48

【知识正文】

6.4.1　空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线.设

$$F(x,y,z)=0 \text{ 和 } G(x,y,z)=0$$

是两个曲面方程,它们的交线为 C.因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个方程,所以应满足方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}.$$

反过来,如果点 M 不在曲线 C 上,那么它不可能同时在两个曲面上,所以它的坐标不满足方程组.

因此,曲线 C 可以用上述方程组来表示.上述方程组叫做**空间曲线的一般方程**.

例 1　求球心在(1,2,3),半径为 3 的球面与平面 $z=5$ 的交线方程.

解　球面方程为:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3^2,$$

所以,球面与平面的交线方程为:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9\\z=5\end{cases}.$$

例 2 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面,其准线是 xOy 面上的圆,圆心在原点 O,半径为 1. 方程组中第二个方程表示一个母线平行于 y 轴的柱面,由于它的准线是 zOx 面上的直线,因此它是一个平面. 方程组就表示上述平面与圆柱面的交线,如图 6-49 所示.

例 3 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示球心在坐标原点 O,半径为 a 的上半球面. 第二个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面,它的准线是 xOy 面上的圆,圆的圆心在点 $\left(\dfrac{a}{2},0\right)$,半径为 $\dfrac{a}{2}$. 方程组就表示上述半球面与圆柱面的交线,如图 6-50 所示.

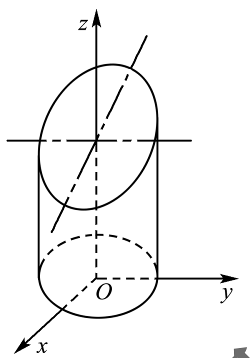

图 6-49

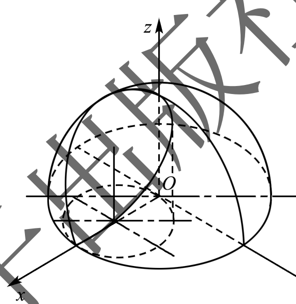

图 6-50

6.4.2 空间曲线的参数方程

空间曲线 C 的方程除了一般方程之外,也可以用参数形式表示,只要将 C 上动点的坐标 x、y、z 表示为参数 t 的函数

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t). \\ z=z(t) \end{cases}$$

当给定 $t=t_1$ 时,就得到 C 上的一个点 (x_1,y_1,z_1),随着 t 的变动便得曲线 C 上的全部点. 上面的方程组叫做**空间曲线的参数方程**.

例 4 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转,同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升(其中 ω、v 都是常数),那么点 M 构成的图形叫做**螺旋线**. 试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数. 设当 $t=0$ 时,动点位于 x 轴上的一点 $A(a,0,0)$ 处. 经过时间 t,动点由 A 运动到 $M(x,y,z)$,如图 6-51 所示. 记 M 在 xOy 面上的投影为 M',M' 的坐标为 $(x,y,0)$. 由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转,所以经过时间 t,$\angle AOM'=\omega t$. 从而

$$x=|OM'|\cos\angle AOM'=a\cos\omega t,$$
$$y=|OM'|\sin\angle AOM'=a\sin\omega t.$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升,所以

$$z=MM'=vt.$$

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\omega t\\ y=a\sin\omega t\\ z=vt\end{cases}.$$

也可以用其他变量作参数. 例如令 $\theta=\omega t$,则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\\ z=b\theta\end{cases},$$

其中 $b=\dfrac{v}{\omega}$,而参数为 θ.

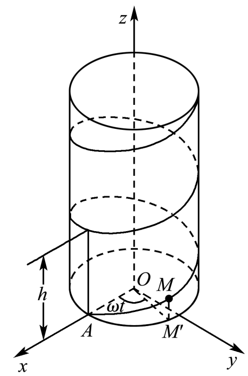

图 6-51

6.4.3　空间直线的一般方程

空间直线可以看成是两个平面的交线. 故其一般方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

如直线 $\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x-y+3z+4=0\end{cases}$.

【知识与能力拓展】

1. 上机演练:用 Mathematica 绘制本节例 1～例 4 中所涉及的曲面和曲线图形.

2. **空间曲线在坐标面上的投影**

以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面叫做曲线 C 关于 xOy 面的**投影柱面**,投影柱面与 xOy 面的交线叫做空间曲线 C 在 xOy 面上的**投影曲线**,或简称**投影**(类似地可以定义曲线 C 在其它坐标面上的投影).

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}.$$

设方程组消去变量 z 后所得的方程为

$$H(x,y)=0,$$

这就是曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面.

这是因为一方面方程 $H(x,y)=0$ 表示一个母线平行于 z 轴的柱面,另一方面方程 $H(x,y)=0$是由方程组消去变量 z 后所得的方程,因此当 x、y、z 满足方程组时,前两个数 x、y 必定满足方程 $H(x,y)=0$,这就说明曲线 C 上的所有点都在方程 $H(x,y)=0$ 所表示的曲面上,即曲线 C 在方程 $H(x,y)=0$ 表示的柱面上. 所以方程 $H(x,y)=0$ 表示的柱面就是曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面.

曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases}H(x,y)=0\\ z=0\end{cases}.$$

同理,曲线 C 在 yOz 面和 zOx 面上的投影曲线的方程分别是

$$\begin{cases}I(y,z)=0\\x=0\end{cases},\begin{cases}J(x,z)=0\\y=0\end{cases}.$$

例 5 已知两球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$,求它们的交线 C 在 xOy 面上的投影方程.

解 先将方程 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 化为 $x^2+y^2+z^2-2y-2z=1$,然后与方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 相减得 $y+z=1$. 将 $z=1-y$ 代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 得 $x^2+2y^2-2y=0$. 这就是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面方程. 两球面的交线 C 在 xOy 面上的投影方程为

$$\begin{cases}x^2+2y^2-2y=0\\z=0\end{cases}.$$

在重积分和曲面积分中,还需要确定立体或曲面在坐标面上的投影,这时要利用投影柱面和投影曲线,如下例.

例 6 求由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成立体在 xOy 面上的投影.

解 半球面与锥面交线为

$$C:\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\z=\sqrt{3(x^2+y^2)}\end{cases}.$$

由方程 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 消去 z 得到 $x^2+y^2=1$. 这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面. 容易看出,这恰好是半球面与锥面的交线 C 关于 xOy 面的投影柱面,因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=0\end{cases},$$

即 xOy 平面上的以原点为圆心,以 1 为半径的圆. 立体在 xOy 平面上的投影为圆所围成的部分: $x^2+y^2\leqslant 1$, 如图 6-52 所示.

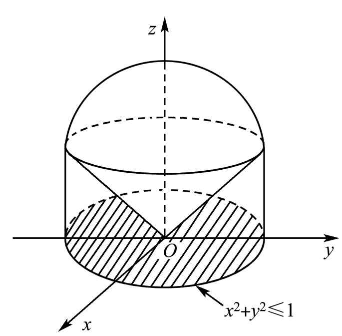

图 6-52

【学习效果评估】

(A)

1. 填空题

(1)在空间直角坐标系中方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1\\y-2=0\end{cases}$ 表示____________.

(2)用平面 $x=h$ 去截双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$,所得截痕是____________;若用平面 $y=k(k^2>b^2)$ 截上述曲面所得截痕是____________.

(3)二次曲面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 与平面 $y=h$ 相截,其截痕是空间中的____________.

(4)曲面 $x^2-y^2=z$ 在 zOx 坐标面上的截痕是____________.

(5)双曲抛物面 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=2z$ 与 xOy 坐标面的交线是______________.

(6)由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 所围成的有界区域用不等式组可表示为______________.

2.指出下列方程所表示的曲线

(1) $\begin{cases}x^2+4y^2+9z^2=36\\y=1\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}y^2+z^2-4x+8=0\\y=4\end{cases}$

3.将曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\y=x\end{cases}$ 化为参数方程.

4.画出下列曲线在第一卦限的图形.

(1) $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\x-y=0\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\x^2+z^2=a^2\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\x=0\end{cases}$

5.分别求通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 而母线平行于 x 轴或 y 轴的柱面方程.

6.指出下列方程所表示的曲线.

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25\\x=3\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x^2-4y^2+z^2=25\\x=-3\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1\\x-2=0\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}y^2+z^2-4x+8=0\\y=4\end{cases}$

7.将下列曲线的一般方程化为参数式方程.

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\y-x=0\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\\z=0\end{cases}$

8*.求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线方程.

9*.写出曲线 $\begin{cases}y^2+z^2-2x=0\\z=3\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程.

10*.求两曲面 $z=x^2+y^2$ 及 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的交线在 xOy 面上的投影曲线方程.

11*.求曲线 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=a\sin t\\z=bt\end{cases}$ 在各坐标面上的投影曲线方程.

12*.求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$在三坐标面上的投影.

13*.求椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 与抛物柱面 $z=2-x^2$ 的交线关于 xOy 面的投影柱面和在 xOy 面上的投影曲线方程.

(C)

案例　求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$的公共部分在 xOy 面和 zOx 面上的投影.

6.5 多元函数的基本概念

本节主要介绍多元函数的概念、多元函数的极限及多元函数的连续性等.

【知识目标】

理解平面区域的概念;理解多元函数的概念;理解多元函数的极限与连续的概念.

【能力目标】

运用多元函数描述实际问题.

【案例引入】

我们以前讨论的函数都只有一个自变量,这种函数称为一元函数.但在许多实际问题中,往往要考虑多个变量之间的关系,从数学上来说,就是要考虑一个变量(因变量)与另外多个变量(自变量)之间的相互依赖关系.

引例1 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r 、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2 h.$$

这里,当 r 、h 在集合 $\{(r,h)|r>0,h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时,V 对应的值就随之确定.

引例2 设 R 是电阻 R_1、R_2 并联后的总电阻,由电学知识,它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

当 R_1 和 R_2 确定之后,R 对应的值就随之确定.

引例3 某玩具厂生产两种儿童玩具皮球,一种售价3元,另一种售价2元,生产和销售3元的球 x 千个和2元的球 y 千个的总利润是

$$P(x,y)=-2x^2+2xy-y^2+12x-4y-7\ (千元).$$

当两种玩具生产和销售的量 x 和 y 确定后,总利润也就随之确定.

上面的三个例子分别是几何问题、物理问题和经济问题,尽管问题的背景不同,所要解决的问题也不相同,但以上三个引例具有共同的特征:问题中的一个变量取值依赖于另两个相互独立的变量,并被这两个变量的取值唯一确定.抛开三例中各变量的实际意义,仅保留其数量关系,就可以抽象得出二元函数的定义.

【知识正文】

6.5.1 平面区域

在研究讨论一元函数时,经常用到邻域和区间的概念.类似地,在研究讨论多元函数时,会经常用到邻域和区域的概念.将数轴上的邻域和区间概念在平面上加以推广,就可得到平面上的邻域和区域的概念.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点,δ 是某一正数,与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为**点 P_0 的 δ 邻域**,记为 $U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\},$$

也就是

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体，如图 6-53 所示.

$U(P_0,\delta)$中除去点 P_0 后所剩部分，称为**点 P_0 的去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$. 有时候在不需要强调邻域的半径时，可用 $U(P_0)$ 或 $\mathring{U}(P_0)$ 分别表示 P_0 的某个邻域或某个去心邻域.

有了平面邻域的概念，就可以利用它来描述点与点之间的关系. 设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点，则 P 与 E 有以下三种关系：

(1)内点：如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点(如图 6-54 中的点 P_1). 显然，E 的内点属于 E.

(2)外点：如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，$U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的外点(如图 6-54 中的点 P_2).

(3)边界点：如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的边界点(如图 6-54 中的点 P_3). E 的边界点的全体称为 E 的边界.

点集 E 的内点必定属于 E，E 的外点必不属于 E，而 E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E.

例如，点集 $E_1=\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$，如图 6-55 所示，$E_1$ 中每个点都是 E_1 的内点，满足 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 的一切点 (x,y) 都是 E_1 的边界点，它们都不属于 E_1.

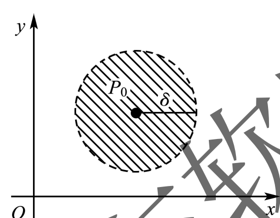

图 6-53

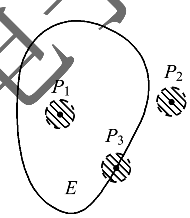

图 6-54

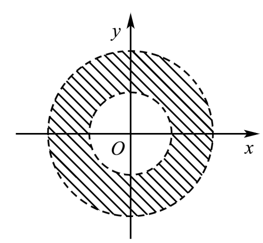

图 6-55

开集：如果点集 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为开集.

连通集：如果点集 E 内的任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 是连通集，如图 6-56 所示.

区域(或开区域)：连通的开集称为区域或开区域. 例如，点集 $\{(x,y) \mid x+y<0\}$ 是开区域，如图 6-57 所示，点集 $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 也是区域，如图 6-55 所示.

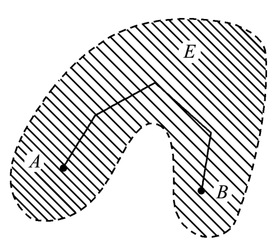

图 6-56

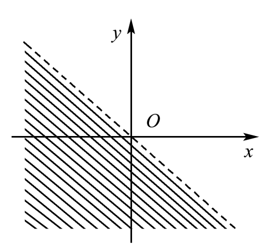

图 6-57

闭区域：开区域连同它的边界一起，称为闭区域. 例如，$\{(x,y) \mid x+y \geqslant 0\}$ 及 $\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$ 都是闭区域.

有界集：对于点集 E，如果存在正数 K，使一切点 $P \in E$ 与某一定点 A 间的距离 $|AP|$ 不超过 K，即

$$|AP| \leqslant K, \text{对一切 } P \in E \text{ 成立},$$

则称 E 为有界点集.

无界点集：点集 E 如果不是有界点集，就称为无界点集.

例如，$\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$ 是有界闭区域，$\{(x,y) \mid x+y>0\}$ 是无界开区域.

6.5.2 *n* 维空间

在平面直角坐标系中，平面上的点与二元有序组 (x,y) 一一对应，二元有序组 (x,y) 的全体所构成的集合称为二维空间，记作 $\mathbf{R}^2$. 在空间直角坐标系中，空间的点与三元有序组 (x,y,z) 一一对应，三元有序组 (x,y,z) 的全体表示了空间中一切点的集合，我们称这个集合为三维空间，记作 $\mathbf{R}^3$.

一般地，由 n 元有序组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体构成的集合称为 n 维空间，记作 $\mathbf{R}^n$，即

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\},$$

其中每个有序组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点，数 x_i 称为该点的第 i 个坐标，类似地，n 维空间中任意两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离定义为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

显然 $n=1,2,3$ 时，上述规定与数轴上、直角坐标系下平面及空间中两点间的距离定义一致.

前面有关平面点集的概念均可逐一推广到 n 维空间 R^n 中去.

例如，设点 $P_0 \in \mathbf{R}^n$，δ 是某一正数，则 n 维空间内的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta, P \in \mathbf{R}^n\}$$

就称为 $\mathbf{R}^n$ 中点 P 的 δ 邻域. 以邻域为基础，可进一步定义点集的内点、外点、边界点，以及开集、闭集、区域等一系列概念，这里不再赘述.

6.5.3 多元函数的概念

1. 二元函数的定义

定义 1 设 D 是平面上的一个点集，如果对于每个点 $P(x,y) \in D$，变量 z 按照一定的法则 f 总有确定的值和它对应，则称变量 z 是变量 x,y 的二元函数(或点 P 的二元函数)，记作

$$z=f(x,y) \ (\text{或 } z=f(P))$$

点集 D 称为该函数的定义域，x,y 称为自变量，z 称为因变量，数集 $\{z \mid z=f(x,y),(x,y) \in D\}$ 称为该函数的值域. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值为 $f(x_0,y_0)$.

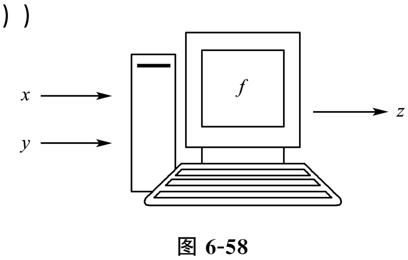

图 6-58

二元函数可以看成是具有两个输入和一个输出的机器(如图 6-58 所示).

当二元函数有实际意义时，它的定义域由实际意义确定；没有实际意义时，其定义域是使得函数表达式有意义的一切点 (x,y) 的集合，并称其为**自然定义域**.

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数. 二元及以上的函数称为**多元函数**.

例 1　试确定下列函数的定义域：

(1)$z=\ln(x+y)$；　　　　(2)$z=\sqrt{x-y^2}+\sqrt{2-x^2-y^2}$；

(3)$z=\dfrac{y^2}{x}$.

解　(1)欲使得函数有意义，则有 $x+y>0$，故函数定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0\}.$$

它是 xOy 平面上的一个开区域(如图 6-59 所示).

(2)同样要使得函数 z 有意义，必须满足 $x-y^2\geqslant 0$ 且 $2-x^2-y^2\geqslant 0$，即定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant y^2 \text{ 且 } x^2+y^2\leqslant 2\}.$$

它是 xOy 平面上的一个闭区域(如图 6-60 所示).

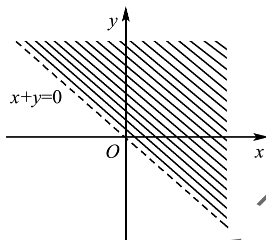

图 6-59

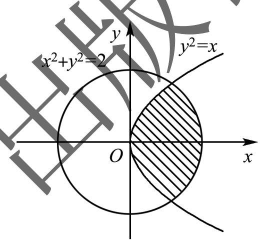

图 6-60

(3)要使函数有意义，则 $x\neq 0$，故函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x\neq 0\}$，它是整个 xOy 平面去掉 y 轴的无界开区域.

例 2　设函数 $f(x,y)=2x^2-y^2$，$g(x,y,z)=e^x(y+z)$，计算函数值 $f(2,3)$ 和 $g(0,-1,4)$.

解　$f(2,3)=2\times 2^2-3^2=8-9=-1$；$g(0,-1,4)=e^0(-1+4)=1\times 3=3$.

例 3　求函数 $z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ 的值域.

解　函数 f 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid 9-x^2-y^2\geqslant 0\}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 9\}.$$

它是一个以原点为圆心，以 3 为半径的圆域. 函数 f 的值域可表示为

$$\{z\mid z=\sqrt{9-x^2-y^2},(x,y)\in D\}.$$

由于 z 是平方根，故 $z\geqslant 0$，同时又有

$$9-x^2-y^2\leqslant 9\Rightarrow\sqrt{9-x^2-y^2}\leqslant 3.$$

因此，函数 $z=f(x,y)$ 的值域为

$$\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 3\}=[0,3].$$

2.二元函数的图形

一元函数 $y=f(x)$ 的图形是一条平面上的曲线. 用类似地方法，我们也可以做出二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形——曲面.

设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$，对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间直角坐标系中就确定了一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 遍取 D 上的一切点时，得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形(如图 6-61 所示). 二元函数的图形通常是空间中的一张曲面.

例如，二元函数 $z=-3x-2y+6$ 的图形是一张平面，在 z 轴上的截距为 6，如图 6-62 所示.

二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 图形是以原点为球心，半径为 1 的上半球面，如图 6-63 所示.

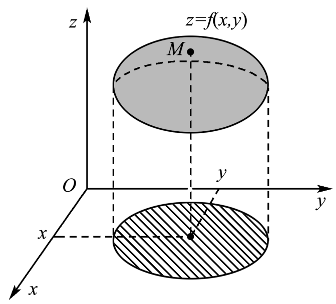

图 6-61

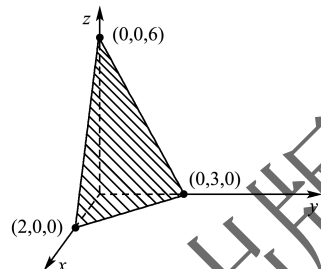

图 6-62

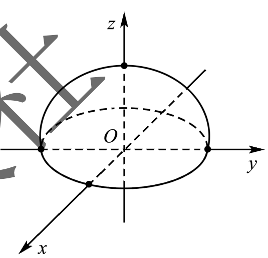

图 6-63

6.5.4 二元函数的极限

极限是研究函数变化趋势的基本方法，它描述自变量变化过程中函数的变化趋势，多元函数的极限概念是一元函数极限概念的推广.

一元函数 $y=f(x)$ 的极限是描述在自变量 x 的某一变化过程中，函数 y 的变化趋势. 二元函数与一元函数相类似，二元函数 $z=f(x,y)$ 的极限也是描述在自变量 $P(x,y)$ 的某一变化过程中，函数 z 的变化趋势.

观察函数 $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ 和 $g(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 当自变量 x 和 y 都趋于 0(从而点 (x,y) 趋于原点)时函数值的变化趋势. 为此列表如下：

表 6-1　　$f(x,y)$ 的函数值

x \ y	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

表 6-2　$g(x,y)$ 的函数值

x \ y	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
-0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
-0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0	-1.000	-1.000	-1.000		-1.000	-1.000	-1.000
0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

注意到函数 $f(x,y)$ 和函数 $g(x,y)$ 在原点处均没有定义，表 6-1 和表 6-2 列出了两个函数在原点附近的函数值. 可以看出当点 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 的函数值趋于 1，而 $g(x,y)$ 的函数值不趋近于任何固定的数，并记作

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1 \text{ 和 } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ 不存在.}$$

一般的，有如下定义：

定义 2　设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个去心邻域内有定义，若动点 $P(x,y)$ 以任意方式趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ ($P(x,y)\neq P_0(x_0,y_0)$)时，函数值 $f(x,y)$ 总趋于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

二元函数的极限与一元函数的极限具有相同的性质和运算法则，为了区别于一元函数的极限，通常称二元函数的极限为**二重极限**.

值得注意的是，在定义 2 中，动点 $P(x,y)$ 趋向点 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式是任意的，路径也各式各样（如图 6-64 所示），即若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$，是指当 $P(x,y)$ 在定义域 D 上以任意方式趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都以常数 A 为极限. 如果 $P(x,y)$ 在 D 上以某种特殊的方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋向于常数 A，则不能断定 $f(x,y)$ 的极限存在. 如果当 $P(x,y)$ 在 D 上以不同的方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋向于不同的常数，或者 $P(x,y)$ 沿某一特定方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 的极限不存在，则可断定函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的极限不存在.

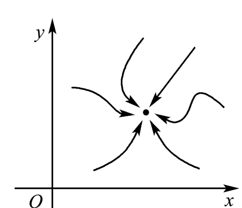

图 6-64

例 4　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解　这里 $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 在区域 $D_1=\{(x,y)\,|\,x<0\}$ 和区域 $D_2=\{(x,y)\,|\,x>0\}$ 内都有定义，$P_0(0,2)$ 同时为 D_1 及 D_2 的边界点. 但无论在 D_1 内还是在 D_2 内考虑，下列运算都

是正确的：

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 2}y=1\times 2=2.$$

例 5 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 令 $u=x^2+y^2$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0.$$

例 6 已知函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},$$

讨论当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限是否存在.

解 当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}0=0$；又当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时，$\lim\limits_{y\to 0}f(0,y)=\lim\limits_{y\to 0}0=0$.

虽然点 $P(x,y)$ 以上述两种特殊方式(沿 x 轴或沿 y 轴)趋于原点时函数的极限存在并且相等，但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 并不存在. 这是因为当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然，它是随着 k 值的不同而不同的.

6.5.5 二元函数的连续性

一元连续函数求极限的方法是直接代入法，即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，这也是一元函数连续性的一种定义形式. 类似的，可以建立二元函数连续的概念如下：

定义 3 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，否则称 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处间断.

如果函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 的每一点都连续，则称**函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续**，或者称 $f(x,y)$ 是区域 D 内的连续函数. 在区域 D 内连续的二元函数的图形是区域 D 上的一张连续曲面.

函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续，直观地来看，就是当点 (x,y) 有一个微小的变动时，函数值 $f(x,y)$ 的变动也是微小的. 同时也意味着连续函数 $f(x,y)$ 在 D 上的图形是一张“连续的、无洞的、没有裂缝的”完好曲面.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，有界闭区域上的二元连续函数也有如下性质：

性质 1(最大值和最小值定理)　**有界闭区域 D 上的二元连续函数 $z=f(P)$，在 D 上一定有最大值和最小值. 这就是说，在 D 上至少有一点 P_1 及一点 P_2，使得 $f(P_1)$ 为最大值而 $f(P_2)$ 为最小值，即对于一切 $P\in D$，有**

$$f(P_2)\leqslant f(P)\leqslant f(P_1).$$

性质 2(介值定理)　**有界闭区域 D 上的二元连续函数 $z=f(P)$，如果在 D 上取得两个不同的函数值，则它在 D 上取得介于这两个值之间的任何值至少一次. 特殊地，如果 μ 是函数在 D 上的最小值 m 和最大值 M 之间的一个数，则至少有一点 Q，使得 $f(Q)=\mu$.**

一元函数中关于极限的运算法则，对于二元函数仍然适用. 根据极限运算法则，可以证明二元连续函数的和、差、积均为连续函数. 在分母不为零处，连续函数的商是连续函数. 二元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元的初等函数相类似，**二元初等函数**是可用一个式子所表示的二元函数，而这个式子是由常数及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的，例如，$\dfrac{x+x^2-y^2}{1+x^2}$，$\sin(x+y)$ 等都是二元初等函数.

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性，再利用基本初等函数的连续性，可以进一步得到如下结论：

一切二元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓**定义区域**是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由二元初等函数的连续性，如果要计算它在点 P_0 处的极限，而该点又在此函数的定义区域内，则极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

例 7　求极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x+y}{xy}$.

解　函数 $f(x,y)=\dfrac{(x+y)}{xy}$ 是二元初等函数，它的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\neq 0,y\neq 0\}.$$

因 D 不是连通的，故 D 不是区域. 但 $D_1=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 是区域，且 $D_1\subset D$，所以 D_1 是函数 $f(x,y)$ 的一个定义区域. 因 $P_0(1,2)\in D_1$，故

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{x+y}{xy}=f(1,2)=\frac{3}{2}.$$

例 8　求极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解　$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$$

以上关于二元函数的极限、连续的定义以及有界闭区域上连续函数的性质可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去.

【知识与能力拓展】

1. 学习应用 Mathematica 软件计算二元函数极限的指令.
2. 复习应用 Mathematica 软件绘制二元函数图形的指令.
3. 上机演练:确定下列极限是否存在,若存在求出该极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}(x^2y^2-2xy^5+3y)$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

4. 上机演练:二元函数 $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0,0) 处不连续,用 Plot3D 命令作出在区域 $\{(x,y)\mid -2\leqslant x\leqslant 2,-2\leqslant y\leqslant 2\}$ 上的图形(采用选项 PlotPoints→40). 观察曲面在 (0,0) 附近的变化情况.

【学习效果评估】

(A)

1. 求下列各函数表达式:

(1) $f(x,y)=x^2-y^2$,求 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)$.

(2) $f(x+y,x-y)=2(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$,求 $f(x,y)$.

2. 求下列各函数的定义域:

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$;

(2) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{2-x}$;

(3) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

(4) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

3. 设函数 $f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$,求:

(1) $f(-2,3)$;

(2) $f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{2}{y}\right)$.

4. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

(4) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(3,0,1)}e^{-xy}\sin(\pi z/2)$

5. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

(B)

1. 求函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}\ln(x^2+y^2-1)$ 的定义域,并画出定义域的图形.

2. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的?

3. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)处的连续性.

(C)

1. 某汽车租赁公司出租某品牌轿车每天收费 100 元，每公里收费 2 元，

(1)把租赁该品牌汽车的成本 C 用租赁天数 d 及行驶的公里数 k 的函数表示出来.

(2)如果 $C=f(d,k)$，求 $f(3,300)$ 并说明它表示的含义.

(3)分别说明 $f(3,k)$ 和 $f(d,100)$ 表示的含义.

2. 设 M 是最初 B 元的投资 t 年后在银行帐户的金额. 如果每年 5%的利率分别按(a)年复利,(b)连续复利计息,求函数 $M=f(B,t)$ 的表达式.

3. 近似计算人体表面积 S（单位：m^2）的 Mosteller 公式为 $S(h,w)=\dfrac{\sqrt{hw}}{60}$，其中 h 是人的身高(单位：cm)，w 是人的体重(单位：kg). 使用 Mosteller 近似公式计算自己的表面积.

4. 心理学中的智商为 $Q(m,c)=100\cdot\dfrac{m}{c}$，其中 m 是人的智力年龄，而 c 是他的实际年龄. 求 $Q(21,20)$ 和 $Q(19,20)$.

6.6　偏导数

本节主要介绍二元函数的偏导数概念及计算、偏导数的几何意义以及偏导数与连续的关系等.

【知识目标】

理解二元函数偏导数概念；会计算偏导数；记忆偏导数的几何意义；理解偏导数与连续的关系.

【能力目标】

运用二元函数偏导数求解简单实际问题.

【案例引入】

在研究一元函数时，从研究函数的变化率引入了导数概念. 对于多元函数同样需要讨论它的变化率. 但多元函数的自变量不止一个，函数关系要比一元函数复杂得多. 在实际问题中，常常需要了解一个受多种因素制约的变量，在其他因素固定不变的情况下，该变量只随一种因素变化的变化率问题，反应在数学上就是多元函数在其他自变量固定不变时，函数随一个自变量变化的变化率问题，观察下面的例子：

引例　在铅球投掷训练中，教练关心的核心问题是投掷的距离. 而距离的远近主要取决于投掷的速度和角度，而距离是速度和角度的二元函数：$s=f(v,\alpha)$. 这两个因素中哪一个更重要呢？一般来讲，就是先固定一个因素而让另一个因素变化，分别考察每个因素对距离的作用. 例如，v 固定时，其结果见表 6-3.

表 6-3 当 v 固定时 $s=f(v,\alpha)$ 随 α 的变化情况

速度 $v/(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$	角度 $\alpha/°$	距离 s/m
11.5	45	15.103
11.5	42.5	15.182
11.5	40	15.169
11.5	38	15.092
11.5	36	14.69
11.5	41.2	15.187
11.5	41.6	15.189

这里把一个变量固定($v=11.5$),而由另一个变量(α)变化所产生的距离的变化反映了 α 对 s 的作用.

当 v 固定时,函数 $s=f(v,\alpha)$ 变成了关于变量 α 的一元函数,将此函数记为 $g(\alpha)=f(11.5,\alpha)$,则函数 $g(\alpha)$ 描述了铅球的投掷速度固定为 11.5m/s 时,投掷的距离随着投掷角度 α 的变化而变化的情况. 函数 g 当 $\alpha=38°$时的导数就是函数 g 在 $\alpha=38$ 处的变化率:

$$g'(38)=\lim_{h\to 0}\frac{g(38+h)-g(38)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(11.5,38+h)-f(11.5,38)}{h}.$$

利用表 6-3 给定的数据,可以近似求出上述变化率 $g'(\alpha)$,分别取 $h=2$ 和 $h=-2$ 得:

$$g'(38)\approx\frac{g(40)-g(38)}{2}=\frac{f(11.5,40)-f(11.5,38)}{2}=\frac{15.169-15.092}{2}=0.0385,$$

$$g'(38)\approx\frac{g(36)-g(38)}{-2}=\frac{f(11.5,36)-f(11.5,38)}{-2}=\frac{14.96-15.092}{-2}=0.066.$$

求出上面两个值的平均值,就可以得到导数 $g'(38)$ 的近似值为 0.0523.这就意味着,当投掷速度为 11.5m/s,投掷角度为 38°时,投掷的距离当投掷角度每变化一度时,投掷的距离改变 0.0523m.

这种在二元函数中固定一个变量而求出的函数关于另一个自变量的导数,就是偏导数.

一般地,若 f 是关于两个变量 x 和 y 的二元函数 $f(x,y)$,让 x 变化而让 y 固定(即看作常量),则 f 就只是自变量 x 的一元函数,可以计算 f 关于 x 的导数,这个导数称为 f 关于 x 的偏导数.

【知识正文】

6.6.1 偏导数的概念

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义,当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{ 或 } f_x(x_0,y_0)$$

即

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

由上述定义可以看出，$f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处分别沿平行于 x 轴和 y 轴方向上的变化率.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点(x,y)处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数是 x、y 的函数，它就称为函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 x 的偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x \text{ 或 } f_x(x,y).$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对**自变量 y 的偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y \text{ 或 } f_y(x,y).$$

由偏导数的概念可知，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 显然就是偏导函数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值；$f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值，就像一元函数的导函数一样，以后再不至于混淆的地方也把偏导函数称为偏导数.

6.6.2　偏导数的计算

实际上，求函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数，并不需要用新的方法，因为这里只有一个自变量在变动，另一个自变量是看作固定的，所以仍旧是一元函数的微分法问题. 故可得求函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数的方法如下：

(1)求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把 y 暂时看作常量而关于 x 求导数即可；

(2)求 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 时，只要把 x 暂时看作常量而关于 y 求导数即可.

例 1　求函数 $z=f(x,y)=x^2y^3+xy+4y^2$ 的偏导数.

解　把 y 看作常量，函数关于 x 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3+y.$$

把 x 看作常量，函数关于 y 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+x+8y.$$

例 2 求函数 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点(1，2)处的偏导数.

解 把 y 看作常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y.$$

把 x 看作常量，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y.$$

将(1，2)代入上面的结果，就得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\times1+3\times2=8,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=3\times1+2\times2=7.$$

例 3 求函数 $z=x^2\sin 2y$ 的偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin 2y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cos 2y$.

例 4 设 $z=x^y(x>0,x\neq1)$，求证：

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

证明 因为 $$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,$$

所以 $$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=x^y+x^y=2z.$$

偏导数的概念还可以推广到二元以上的函数. 例如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点(x,y,z)处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

其中(x,y,z)是函数 $u=f(x,y,z)$ 的定义域的内点. 它们的求法也仍旧是一元函数的微分法问题.

例 5 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解 把 y 和 z 都看作常量，得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}.$$

由于所给函数关于自变量的对称性，所以

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

例 6 已知理想气体的状态方程 $pV=RT$（R 为常量)，求证：

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

证明　因为

$$p=\frac{RT}{V},\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2};V=\frac{RT}{p},\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p};T=\frac{pV}{R},\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R};$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1.$$

对一元函数来说，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可看作函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商. 而例 6 中的式子表明，偏导数的记号是一个整体记号，不能看作分子与分母之商.

有关偏导数的几点说明：

(1)偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是一个整体记号，不能拆分；

(2)求分界点、不连续点处的偏导数要用定义求.

例 7　设 $z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，求 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$.

解　$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0.$

同理可得

$$f_y(0,0)=0.$$

例 8　设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f(x,y)$ 的偏导数.

解　当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x\cdot xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x(x^2+y^2)-2y\cdot xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，按定义可知

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

所以

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

6.6.3　偏导数的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数有下述几何意义：

设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点，过 M_0 作平面 $y=y_0$，截此曲面得一曲线，此曲线在平面 $y=y_0$ 上的方程为 $z=f(x,y_0)$，则导数 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$，也就是偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，就是曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴正向的斜率(如图 6-65 所示). 同样，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线 $z=f(x_0,y)$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴正向的斜率.

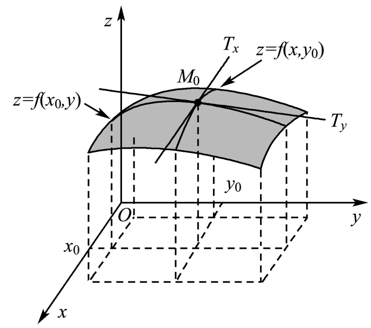

图 6-65

6.6.4 偏导数存在与连续的关系

如果一元函数在某点具有导数，则它在该点必定连续，但连续不一定可导. 对于多元函数来说，偏导数存在与连续之间却没有像一元函数那样的必然结果. 以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例，即使在点 (x_0,y_0) 处，偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 及 $f_y(x_0,y_0)$ 都存在，也不能得到 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 这是因为 $f_x(x_0,y_0)$ 存在，只能保证点 $P(x,y)$ 沿着平行于坐标轴的方向趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$，但不能保证点 P 按任何方式趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 都趋于 $f(P_0)$.

例如，二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，由本节例 8 可知它在点 $(0,0)$ 处的偏导数存在. 从前面 6.5 节的例 6 可知这个函数在点 $(0,0)$ 不连续. 这说明多元函数的连续与偏导数是否存在没有必然联系.

例 9 验证函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，但两个偏导数却不存在.

解 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0)$ 知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，又因为

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x},\end{aligned}$$

由于极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，从而偏导数 $f_x(0,0)$ 不存在，同样可得偏导数 $f_y(0,0)$ 也不存在.

6.6.5 高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y),$$

那么在 D 内偏导函数 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 仍然都是 x,y 的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在，即偏导数 $(f_x)_x,(f_x)_y,(f_y)_x,(f_y)_y$ 都存在，则称这些偏导数是函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**. 按照对自变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数：

$$(f_x)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\ (f_x)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$(f_y)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\ (f_y)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中第二、三个偏导数称为**混合偏导数**.

记号 f_{xy}（或 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$）表示首先对函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 求偏导数，对得到的偏导数 $f_x(x,y)$ 再关于 y 求偏导数，而 f_{yx}（或 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$）的计算顺序恰好相反.

类似的，对得到的二阶偏导数 $f_{xx}(x,y),f_{xy}(x,y),f_{yx}(x,y),f_{yy}(x,y)$ 关于 x 或 y 再求偏导数，得到的偏导数就称为三阶偏导数. 以此类推，可以得到四阶，五阶，…，以及 n 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

例 10　设 $z=4x^3+3x^2y-3xy^2-x+y$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=12x^2+6xy-3y^2-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=3x^2-6xy+1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(12x^2+6xy-3y^2-1)=24x+6y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2-6xy+1)=-6x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(12x^2+6xy-3y^2-1)=6x-6y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2-6xy+1)=6x-6y,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}(24x+6y)=24.$$

例 11　求 $z=x\ln(x+y)$ 的二阶偏导数.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(x+y)+\frac{x}{x+y},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x+y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x+y}+\frac{x+y-x}{(x+y)^2}=\frac{x+2y}{(x+y)^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-x}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x+y}+\frac{-x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{(x+y)-x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2}.$$

上两例中两个二阶混合偏导数相等，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，这不是偶然的. 事实上，有下述定理.

定理 1　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

换句话说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关. 这给混合偏导数的计算带来了方便. 同样高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导的次序无关.

例 12 设 $z=xe^{\frac{y}{x}}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{y}{x}}+xe^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\left(1-\frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=e^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}+\left(1-\frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{y^2}{x^3}e^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}+\left(1-\frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{2y}{x^3}e^{\frac{y}{x}}+\frac{y^2}{x^3}e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{2xy+y^2}{x^4}e^{\frac{y}{x}}.$$

例 13 证明函数 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}.$$

证明 因为 $$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2r}\cdot 2x=\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}.$$

由于函数关于自变量的对称性，所以

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\ \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

因此

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

6.6.6* 偏导数在经济分析中的应用

一元函数的微分学中引入的边际和弹性的概念，分别表示经济函数在一点的变化率和相对变化率，这些概念也可以推广到多元函数中去，并有着丰富的经济含义.

1.边际分析

多元函数的偏导数在经济上表示边际经济量，边际经济量的经济意义是：当其中一个经济量变化一个单位时(其他经济量保持不变)总经济量的变化量. 在经济分析中，对于不同的经济函数，边际函数被赋予不同的名称. 例如，某工厂生产 A,B 两种产品，当 A,B 产品的产量分别为 x 和 y 个单位时，总成本函数为 $C=f(x,y)$. 这时偏导数 $\frac{\partial C}{\partial x}$ 称为关于 A 产品的边际成本，它是 B 产品的产量固定时，总成本 C 关于 x 的边际成本，其经济意义是：当 B 产品的产量固定在 y 处，A 产品的产量在 x 的基础上再生产一个单位时成本大约增加 $\frac{\partial C}{\partial x}$.

例 14　某工厂生产甲、乙两种产品，当两种产品的产量分别为 x,y（单位：kg）时，总成本（单位：元）为 $C(x,y)=3x^2+2xy+5y^2+10$，求当 $x=8$，$y=8$ 时，两种产品的生产边际成本.

解
$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{\substack{x=8\\y=8}}=\left.(6x+2y)\right|_{\substack{x=8\\y=8}}=64,$$
$$\left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{\substack{x=8\\y=8}}=\left.(2x+10y)\right|_{\substack{x=8\\y=8}}=96.$$

此结果表明，当乙产品产量不变而甲产品产量再增加 1kg 时，总成本近似增加 64 元；当甲产品产量不变而乙产品产量再增加 1kg 时，总成本近似增加 96 元.

2.弹性分析

设某产品的需求量为
$$Q=Q(P,Y),$$
其中 P 为该产品的价格，Y 为消费者收入.

记需求量 Q 对于价格 P 、消费者收入 Y 的偏改变量分别为
$$\Delta_P Q=Q(P+\Delta P,Y)-Q(P,Y),\quad \Delta_Y Q=Q(P,Y+\Delta Y)-Q(P,Y),$$
易见，$\dfrac{\Delta_P Q}{\Delta P}$ 表示 Q 在价格由 P 变到 $P+\Delta P$ 时的平均变化率. 而
$$\frac{\partial Q}{\partial P}=\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta_P Q}{\Delta P}$$
表示当价格为 P，消费者收入为 Y 时，Q 对于 P 的变化率，称
$$E_P=\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta_P Q/Q}{\Delta P/P}=\frac{\partial Q}{\partial P}\cdot\frac{P}{Q}$$
为需求 Q 对价格 P 的偏弹性.

同理，$\dfrac{\Delta_Y Q}{\Delta Y}$ 表示 Q 在消费收入由 Y 变到 $Y+\Delta Y$ 时的平均变化率. 而
$$\frac{\partial Q}{\partial Y}=\lim_{\Delta Y\to 0}\frac{\Delta_Y Q}{\Delta Y}$$
表示当价格为 P，消费者收入为 Y 时，Q 对于 Y 的变化率，称
$$E_Y=\lim_{\Delta Y\to 0}\frac{\Delta_Y Q/Q}{\Delta Y/Y}=\frac{\partial Q}{\partial Y}\cdot\frac{Y}{Q}$$
为需求 Q 对收入 Y 的偏弹性.

一个商品的需求量 Q 不仅与该商品的价格和消费者的收入有关，有时还和另外一种商品的价格有关，所以商品的需求量 Q 是一个多元函数.

例如，已知需求函数 $Q=a-bP_1+cP_2+dY$，其中 Q 为商品的需求量，P_1 表示该商品的价格，P_2 表示另一相关商品的价格，Y 表示收入，a,b,c,d 为常数，则需求对收入 Y 的偏弹性为
$$E_Y=\frac{\partial Q}{\partial Y}\cdot\frac{Y}{Q}.$$
它表示当所有其它变量保持不变时，收入的一个小单位的变化率所引起的该商品需求量的变化率.

需求对价格 P_1 的偏弹性为 $E_{P_1}=\frac{\partial Q}{\partial P_1}\cdot\frac{P_1}{Q}$，称 E_{P_1} 为需求的直接价格偏弹性，它表示商品对自身价格变化所产生的反应. 需求对价格 P_2 的偏弹性为 $E_{P_2}=\frac{\partial Q}{\partial P_2}\cdot\frac{P_2}{Q}$，称 E_{P_2} 为需求的交叉价格偏弹性，它表示当所有其它变量保持不变时，商品的需求量对另一种商品价格的变化所作出的反应. 不同的交叉价格偏弹性，能反应两种商品间的相关性.

当 $E_{P_2}>0$ 时，两种商品为互相替代(竞争)的商品. 这时，P_2 增加将引起需求量 Q 的增加. 譬如，夏天时的西瓜和冷饮就是互相替代的商品. 当西瓜的价格和消费者收入不变时，冷饮价格的增加将引起西瓜需求量的增加.

当 $E_{P_2}<0$ 时，两种商品是互相补充的商品. 这时，P_2 增加将引起需求量 Q 的减少. 例如，汽车和汽油就是互相补充的两种商品，当汽车的价格和消费者收入不变时，汽油价格的增加将导致开车费用增加，从而将引起汽车需求量的减少.

当 $E_{P_2}=0$ 时，认为两种商品是互相独立的商品.

例 15 设某商品的需求函数为

$$Q=10P_1^{-\frac{2}{3}}P_2^{-\frac{1}{4}}Y^{\frac{1}{3}}.$$

其中 P_1 是该商品的价格，P_2 是相关商品的价格，Y 是消费者收入，求该商品的直接价格偏弹性、交叉价格偏弹性及收入偏弹性.

解 需求的直接价格偏弹性为

$$E_{P_1}=\frac{\partial Q}{\partial P_1}\cdot\frac{P_1}{Q}=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 10P_1^{-\frac{5}{3}}P_2^{-\frac{1}{4}}Y^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{P_1}{10P_1^{-\frac{2}{3}}P_2^{-\frac{1}{4}}Y^{\frac{1}{3}}}=-\frac{2}{3}.$$

需求的交叉价格偏弹性为

$$E_{P_2}=\frac{\partial Q}{\partial P_2}\cdot\frac{P_2}{Q}=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 10P_1^{-\frac{2}{3}}P_2^{-\frac{5}{4}}Y^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{P_2}{10P_1^{-\frac{2}{3}}P_2^{-\frac{1}{4}}Y^{\frac{1}{3}}}=-\frac{1}{4}.$$

需求的收入偏弹性为

$$E_Y=\frac{\partial Q}{\partial Y}\cdot\frac{Y}{Q}=\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 10P_1^{-\frac{2}{3}}P_2^{-\frac{1}{4}}Y^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{Y}{10P_1^{-\frac{2}{3}}P_2^{-\frac{1}{4}}Y^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{3}.$$

针对需求的收入偏弹性分析如下：由于 $E_Y=\frac{1}{3}<1$，说明该商品是缺乏收入弹性的，对于给定的收入水平增长的百分比，该商品的需求会低于该比例的增长，这样，随着经济的扩张，该商品的相对市场占有率会下降，该商品的市场潜力的增长是有限的.

【知识与能力拓展】

1. 复习用 Mathematica 软件计算一元函数导数的指令.
2. 学习用 Mathematica 软件计算多元函数偏导数的指令.
3. 上机演练：

(1)计算函数 $z=x^3y-y^3x$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$；

(2)计算函数 $z=x\ln(xy)$ 的各个二阶偏导数.

【学习效果评估】

(A)

1. 求下列函数的偏导数：

(1)$z=x^3y-y^3x$；　　(2)$z=\dfrac{xy}{x-y}$；

(3)$z=2^{xy}$；　　(4)$z=\sin\dfrac{y}{x}$；

(5)$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；　　(6)$u=x^{\frac{y}{z}}$.

2. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$ 在点 (2,4,5) 处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

3. 求下列函数的二阶偏导数：

(1)$z=x^4+y^4-4x^2y^2$；　　(2)$z=y^x$；

(3)$z=y\sin xy+x^2$；　　(4)$z=\ln(x^2+xy+y^2)$.

(B)

1. 设 $z=x^8e^y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

3. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$，$f_{zzx}(2,0,1)$.

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$，$f_{yx}(0,0)$.

(C)

1. 某小型印刷企业共有 N 个工人，其设备价值为 V（以 10 万元为单位），每天的产量为 P（以千页为单位）. 假设该公司的生产函数为 $P=f(N,V)=2N^{0.6}V^{0.4}$.

(1)如果该企业拥有 100 名工人和价值 200 个单位的设备，请问该公司的产量为多少？

(2)求出 $f_N(100,200)$ 和 $f_V(100,200)$. 并用产量来解释你的答案.

2. 设两种产品产量 Q_1 和 Q_2 的联合成本函数为

$$C=C(Q)=15+2Q_1^2+Q_1Q_2+5Q_2^2.$$

(1)求成本 C 关于 Q_1 和 Q_2 的边际成本.

(2)当 $Q_1=3$，$Q_2=6$ 时，求出边际成本的值，并作出经济解释.

3. 在注射某种抗生素后，血液中的细菌浓度 C（百万个/毫升）为注射剂量 x（以克为单位）和注射时间 t（以小时为单位）的函数. 假设有 $C=f(x,t)=te^{-xt}$，求出 $f_x(1,2)$ 和 $f_t(1,2)$ 的值，并解释它们的实际意义.

4. 反映人的表面积 s（m^2）与体重 w（kg）和身高 h（cm）之间的关系的 DuBois 公式为 $s=f(w,h)=0.01w^{0.25}h^{0.75}$. 求出 $f(65,160)$，$f_w(65,160)$ 和 $f_h(65,160)$. 并用人的表面积、身高和体重进行解释.

6.7 全微分

本节主要介绍全微分概念及计算、多元函数可微、偏导数存在与连续的关系、利用全微分进行近似计算等.

【知识目标】

理解全微分的概念;会计算函数全微分;理解多元函数可微、可导与连续的关系.

【能力目标】

运用全微分进行近似计算.

【案例引入】

引例 设有一个矩形金属片,其边长分别为 x,y,由于受热,边长分别增加了 $\Delta x,\Delta y$,试求金属片面积的改变量.

如图 6-66 所示,若矩形金属片的面积用 S 表示,则受热前的金属片面积为:

$$S=xy.$$

受热后的金属片面积的改变量为

$$\Delta S=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y.$$

由图 6-66 知,ΔS 是由 $y\Delta x+x\Delta y$(图 6-66 中的斜线阴影部分)和 $\Delta x\Delta y$(图 6-66 中的右上角网格阴影表示的小矩形)两部分面积组成,当 $\Delta x,\Delta y$ 很小时,就有

$$\Delta S\approx y\Delta x+x\Delta y,$$

与一元函数类似,称 $y\Delta x+x\Delta y$ 为面积 S 的全微分.

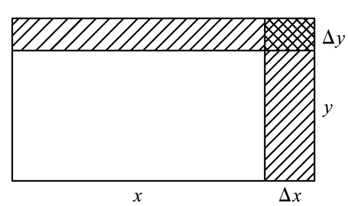

图 6-66

【知识正文】

6.7.1 全微分的概念

1.全微分的定义

二元函数对某个自变量的偏导数表示当另一个自变量固定时,因变量相对于该自变量的变化率,根据一元函数微分学中增量与微分的关系,可得

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\approx f_x(x,y)\Delta x,$$

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f_y(x,y)\Delta y.$$

上面两式的左端分别叫做二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 和对 y 的**偏增量**,而右端分别叫做二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 和对 y 的**偏微分**.

在实际问题中，有时需要研究多元函数中各个自变量都取得增量时因变量所获得的增量，即所谓全增量的问题，下面以二元函数为例进行讨论.

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某一邻域内有定义，并设 $P_1(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 为函数在点 P 对应于自变量增量 Δx，Δy 的**全增量**，记作 Δz，即

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

一般说来，计算全增量 Δz 比较复杂. 与一元函数的情形一样，用自变量的增量 Δx，Δy 的线性函数来近似的代替函数的全增量 Δz，从而引入如下定义.

定义 1　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A、B 不依赖于 Δx、Δy 而仅与 x、y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微，那么称这函数在 D 内可微.

由上述全微分的定义可以看出，函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分是关于 Δx,Δy 的线性函数，且当 $\rho\to 0$ 时，$\Delta z-\mathrm{d}z=o(\rho)$，因此，全微分 $\mathrm{d}z$ 是全增量 Δz 的线性主部. 故当 ρ 很小时，$\Delta z\approx\mathrm{d}z$.

2.全微分存在的条件

下面讨论函数 u 在点 $P(x,y)$ 可微分的条件.

定理 1(必要条件)　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，则该函数在点 $P(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

证明　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分. 于是，对于点 P 的某个邻域的任意一点 $P_1(x+\Delta x,y+\Delta y)$，恒有

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

特别当 $\Delta y=0$ 时上式仍成立，这时 $\rho=|\Delta x|$，从而有

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+o(|\Delta x|).$$

上式两边各除以 Δx，再令 $\Delta x\to 0$,并取极限，即得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A,$$

从而偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 存在，且等于 A. 同样可证 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=B$. 故定理得证.

一元函数在某点的导数存在是微分存在的充分必要条件. 但对于多元函数来说，情形就不同了. 当函数的各偏导数都存在时，虽然能形式地写出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$，但它与 Δz 之差并不一定是较 ρ 高阶的无穷小，因此它不一定是函数的全微分. 换句话说，各偏导数的存在只是全微分存在的必要条件，而不是充分条件. 例如，函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $P(0,0)$ 处有 $f_x(0,0)=0$ 及 $f_y(0,0)=0$，所以

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

如果考虑点 $P_1(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 沿着直线 $y=x$ 趋于 $P(0,0)$，则

$$\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\frac{1}{2},$$

它不能随 $\rho\to 0$ 而趋于 0，这表示 $\rho\to 0$ 时，

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]$$

并不是较 ρ 高阶的无穷小，因此函数在点 $P(0,0)$ 处的全微分并不存在，即函数在点 $P(0,0)$ 处是不可微的.

由定理 1 及这个例子可知，偏导数存在是可微分的必要条件而不是充分条件. 但是，如果函数的各个偏导数连续，则一定有函数是可微分的，下面不加证明地给出全微分存在的充分条件.

定理 2(充分条件)　如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x,y)$ 连续，则函数在该点可微.

以上关于二元函数全微分的定义及微分存在的必要条件和充分条件，可以完全类似地推广到三元和三元以上的多元函数.

与一元函数类似，自变量 x,y 的增量 Δx 和 Δy 常写成 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$，并分别称为自变量 x,y 的微分，于是函数 $z=f(x,y)$ 的全微分可写为

$$\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y.$$

通常把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理.

叠加原理也适用于二元以上的函数的情形. 例如，如果三元函数 $u=\varphi(x,y,z)$ 可微，那么

它的全微分就等于它的三个偏微分之和，即

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

例 1　计算函数 $z = xy + y^2$ 的全微分.

解　因为
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y,$$
所以
$$dz = y\,dx + (x + 2y)dy.$$

例 2　计算函数 $z = 4xy^3 + 5x^2y^6$ 的全微分.

解　因为
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y^3 + 10xy^6,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 12xy^2 + 30x^2y^5,$$
所以
$$dz = (4y^3 + 10xy^6)dx + (12xy^2 + 30x^2y^5)dy.$$

例 3　计算函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解　因为
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz},\ \frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz},$$
所以
$$du = dx + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}\right)dy + ye^{yz}\,dz.$$

例 4　计算函数 $z = e^{xy}$ 在点 (2,1) 处的全微分.

解　因为
$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy},\ \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} = e^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} = 2e^2,$$
所以
$$dz = e^2dx + 2e^2dy.$$

6.7.2　多元函数可微、偏导数存在与连续的关系

前面已指出，多元函数在某点连续与偏导数存在没有必然的关系，即函数在某点连续不能保证它在该点有偏导数，同样即使函数在某点的各偏导数都存在，它在该点也不一定连续.

连续与可微的关系：因为连续不能保证有偏导数，从而就不一定可微了. 反之，不加证明地给出，若函数在某点可微，则它在该点一定连续.

可微与偏导数之间的关系：由定理 1 可知，可微函数的偏导数一定存在. 反之，偏导数存在不一定可微，而只有偏导数存在并且连续的情况下才能保证函数可微.

综上所述，多元函数在一点连续与偏导数存在都是函数在该点可微的必要条件；函数在一点连续与偏导数存在没有蕴含关系；偏导数在一点连续是函数在该点可微的充分条件. 上述结论可用图 6-67 来表示：

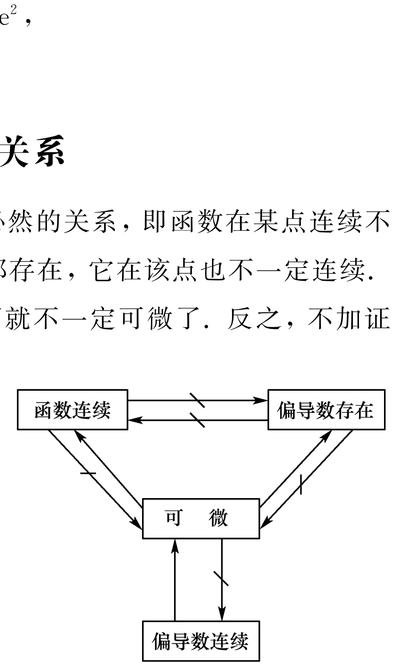

图 6-67

6.7.3 全微分的几何意义

1.曲面的切平面

设函数 $z=f(x,y)$ 的图形为曲面 S，f 的一阶偏导数连续，且点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 S 上的一点．由偏导数的几何意义，设曲线 C_1 和 C_2 分别是平面 $y=y_0$ 和 $x=x_0$ 与曲面 S 的交线，则点 P 既在曲线 C_1 上，又在曲线 C_2 上．设 T_1 是过点 P 的曲线 C_1 的切线，T_2 是过点 P 的曲线 C_2 的切线，则曲面 S 上点 P 处的切平面就是由切线 T_1 和 T_2 确定的平面(如图 6-68 所示)．

在本章 6.9 节中，我们将会看到，对曲面 S 上过点 P 的任意一条曲线 C 来说，它的过点 P 的切线 T 都将位于曲面 S 上过点 P 的切平面内．换句话说，就是曲面 S 过点 P 的切平面包含了所有 S 上过点 P 的曲线 C 的切线 T．这就是说，切平面是点 P 附近与曲面 S 最接近的平面．

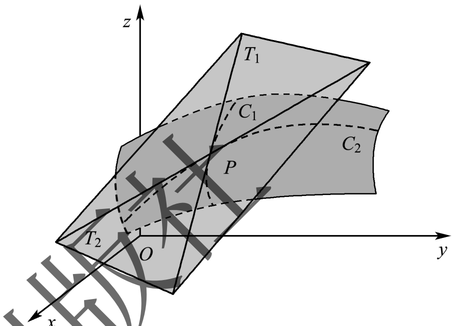

图 6-68

由附录 A2 关于平面的知识可得，任何过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的平面可由下述方程确定：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

方程两端同除以 C，并记 $a=-A/C, b=-B/C$，该平面有如下形式：

$$z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0).$$

若上述平面是曲面 S 的过点 P 的切平面，则该平面与平面 $y=y_0$ 的交线必将是切线 T_1．在切平面方程中设 $y=y_0$，得 T_1 的方程为

$$\begin{cases} z-z_0=a(x-x_0) \\ y=y_0 \end{cases}.$$

我们看到上述方程是一个以 a 为斜率的直线(直线的点斜式)，由偏导数的几何意义马上可以得到 T_1 的斜率为 $f_x(x_0,y_0)$，故有 $a=f_x(x_0,y_0)$．

类似地，在切平面方程中令 $x=x_0$ 可得到 T_2 的方程为 $\begin{cases} z-z_0=b(y-y_0) \\ x=x_0 \end{cases}$，且有 $b=f_y(x_0,y_0)$．

设函数 $z=f(x,y)$ 有连续的偏导数，则曲面 $z=f(x,y)$ 过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面的方程如下：

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

2.全微分的几何意义

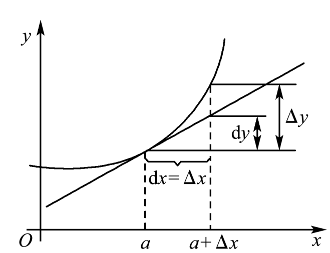

图 6-69

对一元函数 $y=f(x)$ 来说，我们定义 $\mathrm{d}x$ 为一个独立的变量，它可以取任意实数，而将函数的微分定义为：$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$．图 6-69 展示了一元函数微分的几何意义，从图中可以看出函数增量 Δy 和微分 $\mathrm{d}y$ 之间的关系：当自变量 x 有一个改变量

$dx=\Delta x$ 时，Δy 表示曲线 $y=f(x)$ 改变的高度，而 $\mathrm{d}y$ 表示切线改变的高度.

对于二元函数 $z=f(x,y)$，微分 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 仍然定义为独立的变量，即它们可取任何值. 这样函数微分 $\mathrm{d}z$（也称为全微分）为

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

在上式微分定义中，如果取 $\mathrm{d}x=\Delta x=x-a$，$\mathrm{d}y=\Delta y=y-b$，则函数 z 的全微分为

$$\mathrm{d}z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b).$$

图 6-70 展示了二元函数 $z=f(x,y)$ 全微分的几何意义，从图中可以看出全微分 $\mathrm{d}z$ 和全增量 Δz 的关系：当 (x,y) 从 (a,b) 变化到 $(a+\Delta x,b+\Delta y)$ 时，$\mathrm{d}z$ 表示切平面的变化高度，而 Δz 表示曲面的变化高度.

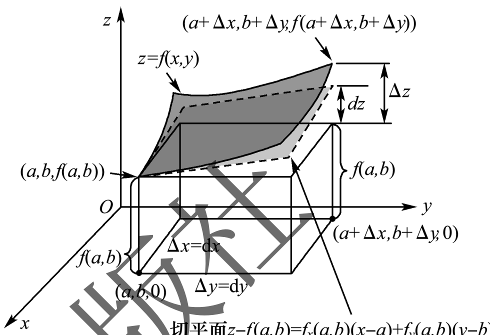

图 6-70

从上面的对比分析可以看到，一元函数微分及二元函数全微分的几何意义可通俗地理解为：对一元函数 $y=f(x)$，在点 x_0 的充分小的领域内可以用切线代替相应的曲线. 对二元函数 $z=f(x,y)$ 在某点 (a,b) 的充分小的邻域内，可以用切平面近似代替相应的曲面.

6.7.4　全微分在近似计算中的应用

根据函数微分定义，当函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微时，函数的全增量与全微分之差为高阶无穷小，因此可以用全微分进行近似计算，其公式为

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y.$$

例 5　用全微分计算 $(2.02)^{0.96}$ 的近似值.

解　$(2.02)^{0.96}$ 是函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(2.02,0.96)$ 处的函数值，令

$$x=2,\Delta x=0.02,y=1,\Delta y=-0.04,$$

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x,$$

可得
$$f(2,1)=2,f_x(2,1)=1,f_y(2,1)=2\ln 2,$$

因此有

$$\begin{aligned}(2.02)^{0.96}&\approx f(2,1)+f_x(2,1)\Delta x+f_y(2,1)\Delta y\\&=2+1\times 0.02+2\ln 2\times(-0.04)\approx 1.9646.\end{aligned}$$

例 6　计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

解　设 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$. 取 $x=1$，$y=2$，$\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.03$，由近似计算公式，有

$$\begin{aligned}\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)\\&\approx f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y\end{aligned}$$

$$=\sqrt{x^3+y^3}+\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Delta x+\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Delta y$$

$$=3+\frac{1}{2}\times 0.02+2\times(-0.03)=2.95.$$

例 7 有一圆柱体，受压后发生形变，它的半径由 20cm 增大到 20.05cm，高度由 100cm 减少到 99cm. 求此圆柱体体积变化的近似值.

解 设圆柱体的半径、高和体积依次为 r,h 和 V，则有

$$V=\pi r^2 h.$$

由 $r=20,h=100,\Delta r=0.05,\Delta h=-1$. 有

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V=V_r\Delta r+V_h\Delta h=2\pi rh\,\Delta r+\pi r^2\Delta h$$

$$=2\pi\times 20\times 100\times 0.05+\pi\times 20^2\times(-1)=-200\pi(\mathrm{cm}^3).$$

即此圆柱体在受压后体积约减少了 $200\pi\mathrm{cm}^3$.

【知识与能力拓展】

1. 学习 Mathematica 中求多元函数全微分的指令.
2. 复习 Mathematica 中计算实数 x 近似值的指令 $N(x,n)$.
3. 上机演练，求下列函数的全微分：

(1) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$；　　(2) $z=\ln(2x+y^3)$ 在点(1,2)处.

4. 用 Mathematica 软件计算例 5 和例 6 的结果(保留有效数字 6 位)，并与利用全微分近似计算的结果进行比较.

【学习效果评估】

(A)

1. 求下列函数的全微分：

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$；　　(2) $z=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$.

2. 设 $z=\dfrac{y}{x}$，当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$，求全增量 Δz 及全微分 $\mathrm{d}z$.

3. 求函数 $z=3x^2y+\dfrac{y}{x}$ 在点 (1,1) 处的全微分.

4. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 点 (1,2) 处的全微分.

(B)

1. 利用全微分求 $1.01^3\times 1.98^2$ 的近似值.
2. 利用全微分求 $(1.97)^{1.05}$ 的近似值 ($\ln 2=0.693$).

(C)

1. 设有一个无盖的圆柱形容器壁与底的厚度分别为 0.02m 与 0.04m，其内半径为 1m，内高为 4m，求容器外壳体积的近似值.

2. 造一长方体无盖铁盒，其内部的长，宽，高分别为 10mm，8mm，7mm，盒子的厚度为

0.1mm，求所用材料的体积的近似值.

6.8　多元复合函数与隐函数偏导数

本节主要介绍多元复合函数的求导法则、全微分的形式不变性以及隐函数的求导法则等.

【知识目标】

会运用多元复合函数的求导法则和隐函数的求导法则求偏导数；记忆全微分的形式不变性.

【能力目标】

会计算复合函数和隐函数的偏导数.

【案例引入】

引例 1　点 (x,y) 处的温度为 $T(x,y)$，单位为摄氏度，一只小虫爬行 t 秒后的位置为 $x=\sqrt{1+t}$，$y=2+\frac{1}{3}t$，其中 x,y 的单位为厘米. 如果温度函数满足 $T_x(2,3)=4$，$T_y(2,3)=3$. 求小虫爬行 3 秒后，温度上升的速率为多少？

在此问题中温度是 x,y 的函数，而 x,y 是 t 的函数，有如图 6-71 所示的复合关系. 要求温度 T 对自变量 t 的导数，需要通过中间变量 x,y 才能到达自变量 t. 相对于一元函数的复合，此问题的中间变量是两个，这就是多元复合函数的求导问题.

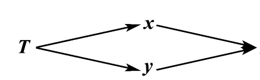

图 6-71

引例 2　在一元函数中，由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的求导公式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

那么对于由二元函数 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 复合而成的二元复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 如何来求关于 x 和 y 的偏导数呢？比如：函数 $z=\mathrm{e}^u\sin v$，其中 $u=xy$，$v=x+y$，如何求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$？

对于一元复合函数，从上述求导法则可以看出，因变量对自变量求导，要首先通过中间变量才能到达自变量，即中间变量是不能逾越的求导过程.

二元函数求偏导数，实质上也是一元函数求导的过程，因此，二元复合函数也有类似的求导公式. 本节中将按照多元复合函数不同的层次结构分别进行讨论它们的求导法则.

【知识正文】

6.8.1 多元复合函数的求导法则

1.全导数公式

定理1 **如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导，且其导数可用下列公式计算：**

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{6-2}$$

用同样的方法，可把定理1推广到复合函数的中间变量多于两个的情形. 例如，由 $z=f(u,v,w)$，$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，$w=\omega(t)$ 复合而得复合函数

$$z=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)],$$

则在与定理1相类似的条件下，这个复合函数在点 t 可导，且其导数可用下列公式计算

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}. \tag{6-3}$$

在公式(6-2)及(6-3)中的导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 称为**全导数**.

注 全导数公式并不需要特殊记忆，只要掌握复合函数的构造层次便抓住了公式的特征. 显然，公式(6-2)中的复合函数的构造层次可用图6-72表示，公式(6-3)可用图6-73表示.

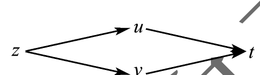

图6-72

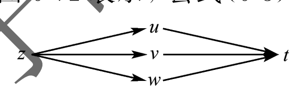

图6-73

例1 设 $z=\mathrm{e}^{u-3v}$，而 $u=\sin t$，$v=t^2$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解 因为
$$\frac{\partial z}{\partial u}=\mathrm{e}^{u-3v},\ \frac{\partial z}{\partial v}=-3\mathrm{e}^{u-3v},$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\cos t,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2t.$$

由全导数公式，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{u-3v}\cdot\cos t-3\mathrm{e}^{u-3v}\cdot 2t\\&=\mathrm{e}^{\sin t-3t^2}(\cos t-6t).\end{aligned}$$

例2 设 $z=u^2v$，而 $u=\cos t$，$v=\sin t$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解 由于 u,v 都是 t 的一元函数，所以 z 是 t 的一元函数.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2uv(-\sin t)+u^2\cos t\\&=-2\sin^2 t\cos t+\cos^3 t.\end{aligned}$$

当然，该题还可转化为关于自变量 t 的一元函数直接求导.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=(\cos^2 t\sin t)'=-2\sin^2 t\cos t+\cos^3 t.$$

例 3　设 $z=x^2+\sqrt{y}$，$y=\sin x$，求全导数$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\cos x=2x+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$

例 4　设 $z=uv+\sin t$，而 $u=\mathrm{e}^t$，$v=\cos t$. 求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial t}=v\mathrm{e}^t-u\sin t+\cos t\\&=\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t+\cos t=\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)+\cos t.\end{aligned}$$

2.偏导数公式

定理 2　**设函数 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 处具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处具有连续偏导数，则复合函数**
$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)] \tag{6-4}$$
在点 (x,y) 处的偏导数存在，且有偏导数公式：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{6-5}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{6-6}$$

对上述公式中的复合函数来说，其变量间的相互依赖关系可用图 6-74 表示.

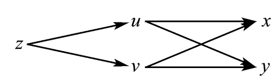

图 6-74

事实上，这里求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 时，将 y 看作常量，因此中间变量 u 及 v 仍可看作一元函数讨论.因此，属于前面已经讨论过的情形，只是导数的记号要作相应的转换：由于复合函数(6-4)以及 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 都是 x、y 的二元函数，所以应把(6-2)式中的 d 改为 ∂，再把 t 换成 x，这样便由(6-2)式得到(6-5)式. 同理由(6-2)式可得到(6-6)式.

类似的，设 $u=\varphi(x,y)$、$v=\psi(x,y)$ 及 $w=\omega(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v,w)$ 在对应点 (u,v,w) 具有连续偏导数，则复合函数
$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$$
在点 (x,y) 的两个偏导数都存在，且可用下列公式计算：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{6-7}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{6-8}$$

如果 $z=f(u,v,w)$ 具有连续偏导数，而 $u=\varphi(x,y)$ 具有偏导数，则复合函数
$$z=f[\varphi(x,y),x,y], \tag{6-9}$$
可看作上述情形中当 $v=x$，$w=y$ 的特殊情形，因此
$$\frac{\partial v}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial w}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=1,$$
从而复合函数(6-9)具有对自变量 x 及 y 的偏导数，且由公式(6-7)及(6-8)得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

注意 这里 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是不同的，$\frac{\partial z}{\partial x}$ 是把复合函数(6-9)中的 y 看作不变而对 x 的偏导数，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 是把 $f(u,x,y)$ 中的 u 及 y 看作不变而对 x 的偏导数. $\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 也有类似的区别.

例 5 求解本节引例 2 中，函数 $z=e^u\sin v$（其中 $u=xy$，$v=x+y$）的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]$.

例 6 设 $u=f(x,y,z)=e^{x^2+y+z^2}$，而 $z=x^2\sin y$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y+z^2}+2ze^{x^2+y+z^2}\cdot 2x\sin y\\&=2x(1+2x^2\sin^2 y)e^{x^2+y+x^4\sin^2 y},\\\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y+z^2}+2ze^{x^2+y+z^2}\cdot x^2\cos y\\&=(1+2x^4\sin y\cos y)e^{x^2+y+x^4\sin^2 y}.\end{aligned}$$

例 7 设函数 $z=f(x,u)=e^u+x^3$，其中 $u=x-y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由多元复合函数求导公式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+e^u=e^{x-y}+3x^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=-e^u=-e^{x-y}.$$

例 8 设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

解 令 $u=x+y+z$，$v=xyz$，则 $w=f(u,v)$. 为表达简便起见，引入以下记号：

$$f'_1=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},\ f''_{12}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v},$$

这里下标 1 表示对第一个变量 u 求偏导数，下标 2 表示对第二个变量 v 求偏导数，同理有 f'_2、f''_{11}、f''_{22} 等.

因所给函数由 $w=f(u,v)$ 及 $u=x+y+z$，$v=xyz$ 复合而成，根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f'_1+yzf'_2;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(f'_1+yzf'_2)=\frac{\partial f'_1}{\partial z}+yf'_2+yz\frac{\partial f'_2}{\partial z}.$$

求 $\dfrac{\partial f_1'}{\partial z}$ 及 $\dfrac{\partial f_2'}{\partial z}$ 时，应注意 f_1' 及 f_2' 仍旧是复合函数，根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial f_1'}{\partial z}=\frac{\partial f_1'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f_1'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=f_{11}''+xy\,f_{12}'';$$

$$\frac{\partial f_2'}{\partial z}=\frac{\partial f_2'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=f_{21}''+xyf_{22}''.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}&=f_{11}''+xy\,f_{12}''+yf_2'+yzf_{21}''+xy^2zf_{22}''\\&=f_{11}''+y(x+z)f_{12}''+xy^2zf_{22}''+yf_2'.\end{aligned}$$

6.8.2　全微分的形式不变性

设函数 $z=f(u,v)$ 具有连续偏导数，则有全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

如果 u 、v 又是 x 、y 的函数，即 $u=\varphi(x,y)$ 、$v=\psi(x,y)$，且这两个函数也具有连续偏导数，则复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$$

的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

其中 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 分别由公式(6-5)和(6-6)给出，将其带入到上式中，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

由此可见，无论 z 是自变量 x 、y 的函数还是中间变量 u 、v 的函数，它的全微分形式是一样的，这个性质叫做**全微分形式不变性**.

例 9　设 $z=\mathrm{e}^u\sin v$ 而 $u=xy$，$v=x+y$. 利用全微分形式不变性求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}(\mathrm{e}^u\sin v)=\mathrm{e}^u\sin v\mathrm{d}u+\mathrm{e}^u\cos v\mathrm{d}v,$$

又由于　$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}(xy)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}(x+y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,$$

故

$$\mathrm{d}z=(\mathrm{e}^u\sin v\cdot y+\mathrm{e}^u\cos v)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^u\sin v\cdot x+\mathrm{e}^u\cos v)\mathrm{d}y,$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}y.$$

比较上式两边的 dx、dy 的系数，就同时得到两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、$\frac{\partial z}{\partial y}$，它们同本节例 5 的结果一样.

6.8.3 隐函数的求导

一元函数微分学中,已经提到了隐函数的概念，并且指出了由方程 $F(x,y)=0$ 所确定隐函数 $y=f(x)$ 的求导方法,现在利用偏导数概念深入讨论这一问题，给出隐函数存在定理及隐函数求导公式.

隐函数存在定理 1　设函数 $F(x,y)=0$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则由方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内能唯一确定一个具有连续偏导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y} \tag{6-10}$$

公式(6-10)就是隐函数的求导公式.

上述定理的证明从略. 仅对公式(6-10)给出推导.

将方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 代入该方程，得

$$F(x,f(x))=0.$$

方程两端分别对 x 求偏导，由复合函数求导法则得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0.$$

由于 F_y 连续，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，故存在 $P(x_0,y_0)$ 的一个邻域，在这个邻域内 $F_y\neq 0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

例 10　求由方程 $x^3+y^3=6xy$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数.

解　设 $F(x,y)=x^3+y^3-6xy$，则

$$F_x=3x^2-6y,F_y=3y^2-6x,$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{3x^2-6y}{3y^2-6x}=-\frac{x^2-2y}{y^2-2x}.$$

例 11　求由方程 $e^x+\cos xy-y^2=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数.

解　设 $F(x,y)=e^x+\cos xy-y^2$，则

$$F_x=e^x-y\sin xy,\ F_y=-(x\sin xy+2y),$$

因此

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{e^x-y\sin xy}{x\sin xy+2y}.$$

由二元方程 $F(x,y)=0$ 可以确定一个一元隐函数，那么由一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 就有可能确定一个二元隐函数，此时有下面的定理.

隐函数存在定理 2　**设函数** $F(x,y,z)$ **在点** $P(x_0,y_0,z_0)$ **的某一邻域内具有连续的偏导数，且** $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，**则方程** $F(x,y,z)=0$ **在点** (x_0,y_0,z_0) **的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数** $z=f(x,y)$，**它满足条件** $z_0=f(x_0,y_0)$，**并有**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}. \tag{6-11}$$

公式(6-11)就是二元隐函数求导公式. 略去其证明，仅就公式(6-11)作如下推导.

由于
$$F(x,y,f(x,y))=0,$$
将上式两端分别对 x 和 y 求导，应用复合函数求导法则得

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

因为 F_z 连续，且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，所以存在点 (x_0,y_0,z_0) 的一个邻域，在这个邻域内 $F_z\neq 0$，于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 12　设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $\cos z=xyz$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　设 $F(x,y,z)=\cos z-xyz$，则

$$F_x=-yz,\ F_y=-xz,\ F_z=-(\sin z+xy),$$

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{yz}{\sin z+xy},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{xz}{\sin z+xy}.$$

例 13　设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$，则 $F_x=2x$，$F_z=2z-4$. 由二元隐函数求导公式，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z}.$$

再一次对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x\left(\frac{x}{2-z}\right)}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

【知识与能力拓展】

1. 学习用 Mathematica 软件计算多元复合函数导数的指令.
2. 学习用 Mathematica 软件计算二元隐函数偏导数的指令序列.
3. 上机演练：利用 Mathematica 软件求解下列各题：

(1)设 $z=u^2\ln v$，$u=\frac{x}{v}$，$v=3x-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(2)设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $xyz=\ln yz-2$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

【学习效果评估】

(A)

1. 设 $z=u^2+v^2$，其中 $u=x+y,v=x-y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $z=u^2\ln v$，其中 $u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $z=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)$，其中 $y=x^3$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

4. 设 $z=\mathrm{e}^{x-2y}$，其中 $x=\sin t$，$y=t^3$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

5. 设 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

6. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

7. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(B)

1. 设 $u=\frac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x$，$z=\cos x$，a 为常数，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

2. 设 $z=\arctan\frac{x}{y}$，而 $x=u+v$，$y=u-v$，验证 $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

3. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数)：

(1)$u=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$；

(2)$u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$；

(3)$u=f(x,xy,xyz)$.

4. 设 $\mathrm{e}^z-xyz=0$，其中 z 是 x,y 的函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5. 证明隐函数 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 一定满足表达式 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

6. 设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\frac{y}{x}$，$F(u)$ 为可导函数，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

7. 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，验证 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

8. 设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(C)

1. 求解引例 1.

2. 理想气体状态方程为 $PV=8.31T$，温度 T 以每秒 0.1K 的速度增加，体积 V 以每秒0.2L 速度升高，求当 $T=300\mathrm{K}$，$V=100\mathrm{L}$ 时压强的变化率是多少?

3. 小麦的年产量 W 与年平均气温 T 和年降雨量 R 有关. 科学家估计平均气温以每年 0.15℃的速度上升，年降雨量以每年 0.1cm 的速度下降，还估计在当前条件下，$\frac{\partial W}{\partial T}=-2$，$\frac{\partial W}{\partial R}=8$.

(1)偏导的含义是什么？

(2)在当前条件下，小麦年产量的变化率是多少？

4. 一个盒子的长 l、宽 w、高 h 随着时间的变化而变化. 在某个时刻，盒子的长、宽、高尺寸分别为 $l=1\text{m}$，$w=h=2\text{m}$，并且此时长、宽以 2m/s 的速度增长，而高以 3m/s 的速度下降. 求此时下面各量的变化率.

(1)盒子的体积；(2)盒子的表面积；(3)盒子对角线的长.

6.9* 多元函数微分法在几何上的应用

本节主要介绍空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线等.

【知识目标】

记忆空间曲线的切线和法平面的求法；记忆曲面的切平面和法线的求法.

【能力目标】

运用微分学知识解决一些几何学中的简单应用问题.

【案例引入】

引例　有一个表面是一个旋转抛物面的底座，其表面的曲面方程为 $z+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=0$，现要在其表面找一点 M(假设所找的 M 点在曲面和平面 xOz 的交线上，如图 6-75 所示)，以 M 点为切点安装一面平面镜子，使得沿 z 轴反方向照射下来的光线能被水平地反射出去.

对在 M 点安装的符合条件的镜子来说，它所在的平面实质上就是底座曲面的切平面，也就是旋转抛物面在点 M 处的切平面. 如果称过 M 点且垂直于该切平面的直线为曲面的法线，则要想光线达到反射的要求，M 点的选取就要满足条件：M 处的法线与 x 轴正向成 $\frac{\pi}{4}$ 夹角.

在本节内容中，不仅要详细讨论如何用曲面方程的偏导数来表示曲面的切平面和法线，而且还要讨论空间曲线的切线与法平面.

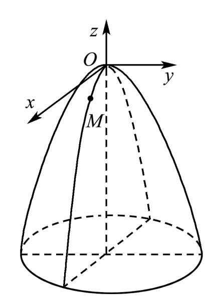

图 6-75

* 本节内容的学习需要具备附录 A2 的相关知识.

【知识正文】

6.9.1 空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

式中的三个函数均可导，且导数不全为零.

在曲线 C 上取对应于参数 $t=t_0$ 的一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 及对应于参数 $t=t_0+\Delta t$ 的邻近一点 $M_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$. 根据空间解析几何，曲线的割线 MM_1 的方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z},$$

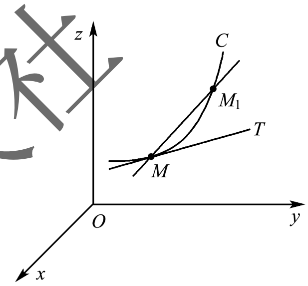

图 6-76

当点 M_1 沿着曲线 C 趋于点 M 时，割线 MM_1 的极限位置 MT 就是曲线在点 M 处的切线(如图 6-76 所示). 上式分母同除以 Δt，则有

$$\frac{x-x_0}{\Delta x/\Delta t}=\frac{y-y_0}{\Delta y/\Delta t}=\frac{z-z_0}{\Delta z/\Delta t},$$

当 $M_1\to M$，即 $\Delta t\to 0$ 时，曲线在 M 处的切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

曲线在某点处的切线的方向向量称为曲线的**切向量**. 向量

$$\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

就是曲线 C 在点 M 处的一个切向量.

过点 M 且与切线垂直的平面称为曲线 C 在点 M 处的**法平面**. 曲线的切向量就是法平面的法向量，于是，该法平面的方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

例 1 求曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

解 因为 $x_t'=1,y_t'=2t,z_t'=3t^2$，而点 $(1,1,1)$所对应的参数 $t=1$，所以曲线切向量为

$$\boldsymbol{T}=(1,2,3).$$

于是，切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

法平面方程为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

即

$$x+2y+3z=6.$$

例 2 求曲线 C：$x=\int_0^t \mathrm{e}^u\cos u\,\mathrm{d}u,y=2\sin t+\cos t,z=1+\mathrm{e}^{3t}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

解 当 $t=0$ 时，$x=0,y=1,z=2$，$x'=\mathrm{e}^t\cos t$，$y'=2\cos t-\sin t$，$z'=3\mathrm{e}^{3t}$，于是

$$x'(0)=1,\ y'(0)=2,\ z'(0)=3,$$

所以在 $t=0$ 处的切线方程为

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}.$$

法平面方程为 $x+2(y-1)+3(z-2)=0$，即 $x+2y+3z-8=0$.

如果空间曲线 C 的方程为 $\begin{cases}y=\varphi(x)\\z=\psi(x)\end{cases}$，则可取 x 为参数，将曲线 C 的方程表示为参数方程的形式

$$\begin{cases}x=x\\y=\varphi(x).\\z=\psi(x)\end{cases}$$

如果函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则曲线 C 在点 $x=x_0$ 处的切向量 $\boldsymbol{T}=(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0))$，因此曲线 C 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}.$$

法平面方程为

$$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0.$$

例 3　求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解　方程两边对 x 求导得

$$\begin{cases}y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1\end{cases},$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{y-z},$$

则

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,1)}=0,\ \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-2,1)}=-1,$$

由此得切向量

$$\boldsymbol{T}=(1,0,-1).$$

切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}.$$

法平面方程为　$(x-1)+0\cdot(y+2)-(z-1)=0$，即 $x-z=0$.

6.9.2　曲面的切平面与法线

设曲面 S 的方程为 $F(x,y,z)=0$，点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 S 上的一点，函数 $F(x,y,z)$ 的偏导数在该点连续且不同时为零. 过点 M_0 在曲面上可以作出无数条曲线. 这些曲线在点 M_0 处分别都有切线，下面要证明这无数条曲线在点 M_0 处的切线都在同一个平面上.

过点 M_0 在曲面(如图 6-77 所示)上任意作一条曲线 C，设其方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t),\tag{6-12}$$

且 $t=t_0$ 时，

$$x_0=\varphi(t_0),\ y_0=\psi(t_0),\ z_0=\omega(t_0).$$

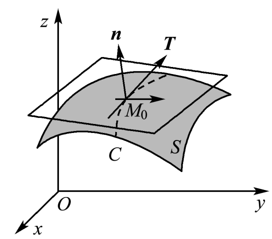

图 6-77

由于曲线 C 在曲面 S 上，因此有恒等式

$$F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\equiv 0.$$

又因 $F(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续偏导数，且 $\varphi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$ 和 $\omega'(t_0)$ 存在，所以恒等式左边的复合函数在 $t=t_0$ 时有全导数，且这个全导数等于零：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\Big|_{t=t_0}=0,$$

即有

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0. \tag{6-13}$$

引入向量

$$\boldsymbol{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

则(6-13)式表示曲线(6-12)在点 M_0 处的切向量 $\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$，它与向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直. 由于曲线是曲面上通过 M_0 的任意一条曲线，它们在 M_0 处的切线都与同一向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，故曲面上通过 M_0 的一切曲线在点 M_0 的切线都在同一平面上，这个平面称为曲面在点 M_0 的**切平面**. 这个切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 而垂直于切平面的直线称为曲面在该点的**法线**. 法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

垂直于曲面上切平面的向量称为**曲面的法向量**. 向量

$$\boldsymbol{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

就是曲面 S 在点 M_0 处的一个法向量.

特殊地，空间曲面方程若为 $z=f(x,y)$，令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，则曲面在 M_0 处的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{6-14}$$

曲面在 M_0 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

方程(6-14)的右端恰好是函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分，而左端是切平面上点的竖坐标的增量. **故 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的全微分，在几何上表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面上的点的竖坐标的增量.**

若 α、β、γ 表示曲面的法向量的方向角，并假定法向量的方向是向上的，即使得它与 z 轴的正向所成的角 γ 是锐角，则法向量的**方向余弦**为

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

其中 $f_x=f_x(x_0,y_0)$，$f_y=f_y(x_0,y_0)$.

例 4 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-1$，于是

$$\boldsymbol{n}|_{(2,1,4)}=(F_x,F_y,F_z)|_{(2,1,4)}=(2x,2y,-1)|_{(2,1,4)}=(4,2,-1),$$

所以在点 (2,1,4) 处的切平面方程为

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0,$$

即

$$4x+2y-z-6=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

例 5　求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 (1,2,0) 处的切平面及法线方程.

解　令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$，于是

$$F_x|_{(1,2,0)}=2y|_{(1,2,0)}=4,\ F_y|_{(1,2,0)}=2x|_{(1,2,0)}=2,\ F_z|_{(1,2,0)}=1-e^z|_{(1,2,0)}=0,$$

所以曲面在点 (1,2,0) 处的切平面方程为

$$4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0,$$

即

$$2x+y-4=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{0}.$$

例 6　求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面方程.

解　设点 (x_0,y_0,z_0) 为曲面上满足条件的切平面的切点，则切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0.$$

依题意，切平面方程平行于已知平面，得

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6},$$

于是有

$$2x_0=y_0=z_0.$$

又因为 (x_0,y_0,z_0) 为曲面上的切点，它满足曲面方程，代入曲面方程可得 $x_0=\pm1$，则所求切点为 (1,2,2) 和 (−1,−2,−2)，故可得：

切平面方程为 $2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$，即 $x+4y+6z=21$.

切平面方程为 $-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$，即 $x+4y+6z=-21$.

【知识与能力拓展】

1. 应用 Mathematica 软件编写求曲面在指定点处求切平面和法线的指令序列.

2. 上机演练：

求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 在点 (2,1,4) 处的切平面及法线方程.

【学习效果评估】

(A)

1. 求曲线 $x=t-\sin t,y=1-\cos t,z=4\sin\dfrac{t}{2}$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$ 处的切线方程及法平面方程.

2. 求曲线 $x=\dfrac{t}{1+t},y=\dfrac{1+t}{t},z=t^2$ 在对应于 $t_0=1$ 点处的切线及法平面方程.

3. 求曲线 $y^2=2mx,\ z^2=m-x$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线及法平面方程.

4. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 (2,1,0) 处的平面线及法线方程.

5. 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的平面线及法线方程.

6. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

(B)

1. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

2. 求出曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上的点,使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

3. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

4. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

(C)

1. 完成本节引例.

6.10* 方向导数与梯度

本节主要介绍方向导数、梯度的概念和求解方法.

【知识目标】

理解方向导数、梯度的概念,记忆方向导数、梯度的求解方法.

【能力目标】

运用方向导数、梯度解释一些实际问题.

【案例引入】

引例 一块长方形的金属板(如图 6-78 所示),四个顶点的坐标分别是(1,1),(5,1),(1,3),(5,3).在坐标原点处有一个火焰,它使金属板受热.假定板上任意一点处的温度与该点到原点的距离成反比.在(3,2)处有一个蚂蚁,问这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地点?

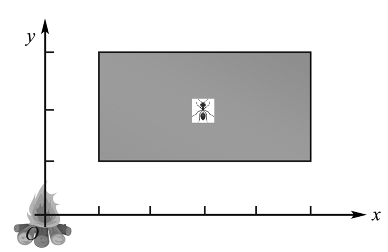

图 6-78

很显然,蚂蚁应该在每一点处都应沿着温度(下降)变化率最大的方向爬行,才能最快到达较凉快的地方,而蚂蚁爬行的这个方向就是本节将要介绍的梯度的方向.

【知识正文】

6.10.1 方向导数

二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 f_x 和 f_y 反映了函数沿着 x 坐标轴和 y 坐标轴方向的变化

---

* 本节内容的学习需要具备附录 A2 的相关知识.

率. 在实际应用中,只考虑函数沿坐标轴方向的变化率是不够的. 例如, 热空气要向冷的地方流动, 气象学中就要确定大气温度、气压沿着某些方向的变化率. 因此有必要讨论函数 $f(x,y)$ 在一点 P 沿任一指定方向的变化率问题.

定义 1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某一邻域 $U(P)$ 内有定义, l 为自点 P 出发的射线, $P_1(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为射线 l 上的任一点, 且 $P_1\in U(P)$, 以

$$|PP_1|=\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

表示点 P 与 P_1 之间的距离(如图 6-79 所示), 如果极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho},$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在点 P 处沿方向 l 的方向导数, 记为 $\frac{\partial f}{\partial l}$, 即

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}.$$

根据上述定义, 函数 $f(x,y)$ 在点 P 沿着 x 轴与 y 轴正向的方向导数分别是是 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$, 沿着 x 轴与 y 轴负向的方向导数分别是 $-\frac{\partial f}{\partial x}$ 与 $-\frac{\partial f}{\partial y}$, 一般情形下, 方向导数与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 间有什么关系呢?

定理 1　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 是可微的, 则函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在, 且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,$$

其中 φ 为 x 轴正向到方向 l 的转角(如图 6-79 所示).

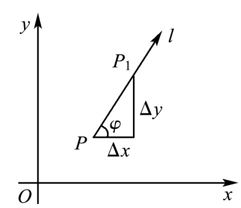

图 6-79

例 1　求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数.

解　这里方向 l 即为 $\overrightarrow{PQ}=(1,-1)$, 故 x 轴到方向 l 的转角 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=e^{2y}|_{(1,0)}=1;\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=2xe^{2y}|_{(1,0)}=2,$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2　求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 沿与 x 轴正向夹角为 α 的方向射线 l 的方向导数. 并问在怎样的方向上此方向导数有:

(1)最大值;　　(2)最小值;　　(3)等于零.

解　由方向导数的计算公式知

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}&=f_x(1,1)\cos\alpha+f_y(1,1)\sin\alpha=(2x-y)|_{(1,1)}\cos\alpha+(2y-x)|_{(1,1)}\sin\alpha\\&=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}).\end{aligned}$$

故有

(1)当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时, 方向导数达到最大值 $\sqrt{2}$;

(2)当 $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$ 时，方向导数达到最小值 $-\sqrt{2}$；

(3)当 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$ 和 $\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$ 时，方向导数等于 0.

类似地可定义，三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在空间一点 $P(x,y,z)$ 沿着方向 l 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho},$$

其中 ρ 为点 $P(x,y,z)$ 与点 $P_1(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$ 之间的距离，即

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}.$$

设方向 l 的方向角为 α,β,γ，则有

$$\Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta,\ \Delta z=\rho\cos\gamma,$$

于是，当函数在点 $P(x,y,z)$ 可微时，函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

例 3　设 l 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量 $\boldsymbol{n}$，求函数 $u=\dfrac{1}{z}(6x^2+8y^2)^{\frac{1}{2}}$ 在点 P 处沿方向 l 的方向导数.

解　设 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$，于是

$$F_x\big|_P=4x\big|_{(1,1,1)}=4,\ F_y\big|_P=6y\big|_{(1,1,1)}=6,\ F_z\big|_P=2z\big|_{(1,1,1)}=2.$$

则

$$l=(F_x,F_y,F_z)=(4,6,2),\ |l|=\sqrt{4^2+6^2+2^2}=2\sqrt{14}.$$

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$. 可得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_{(1,1,1)}=\frac{6}{\sqrt{14}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_{(1,1,1)}=\frac{8}{\sqrt{14}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_{(1,1,1)}=-\sqrt{14}.$$

故函数 u 沿着方向 l 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_{(1,1,1)}=\frac{11}{7}.$$

6.10.2　梯度的概念

与方向导数有关联的一个概念是函数的梯度.

定义 2　**设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P(x,y)\in D$，都可确定一个向量**

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j},$$

称它为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的梯度，记为 $\mathbf{grad}f(x,y)$，即

$$\mathbf{grad}\, f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

设 $\boldsymbol{e}=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$ 是方向 l 上的单位向量，由方向导数公式知

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)\\&=\mathbf{grad}f(x,y)\cdot\boldsymbol{e}=|\mathbf{grad}f(x,y)|\cos\theta,\end{aligned}$$

其中 $\theta=(\widehat{\mathbf{grad}f(x,y),\boldsymbol{e}})$ 为向量 $\mathbf{grad}f(x,y)$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角，由此可见，$\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 就是梯度在射线 l 上的投影(如图 6-80 所示)，如果方向 l 与梯度方向一致时，有

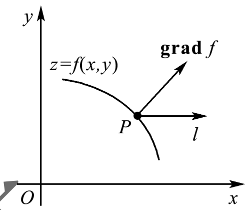

图 6-80

$$\cos(\widehat{\mathbf{grad}f(x,y),\boldsymbol{e}})=1.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 有最大值，即函数 f 沿梯度方向的方向导数达到最大值；

如果方向 l 与梯度方向相反时，有

$$\cos(\widehat{\mathbf{grad}f(x,y),\boldsymbol{e}})=-1,$$

则 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 有最小值，即函数 f 沿梯度的反方向的方向导数取得最小值. 因此，可得到如下结论：

函数在某点的梯度是这样一个向量：它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值.

根据梯度的定义，梯度的模为

$$|\mathbf{grad}f(x,y)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

当 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 不为零时，x 轴与梯度的夹角的正切为 $\tan\theta=\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big/\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

梯度的概念可以推广到三元函数：若三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在空间区域 G 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P(x,y,z)\in G$，都可定义一个向量

$$\mathbf{grad}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

称其为梯度.

类似于二元函数，梯度的方向与取得最大方向导数的方向一致，其模为方向导数的最大值.

例 4　求 $\mathbf{grad}\,\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解　这里 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$，因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},$$

所以

$$\mathbf{grad}\,\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\boldsymbol{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\boldsymbol{j}.$$

例 5 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y$ 在点 $(1,1,2)$ 处的梯度，并问在哪些点处梯度为零？

解 由梯度计算公式得

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,u(x,y,z)&=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=(2x+3)\boldsymbol{i}+(4y-2)\boldsymbol{j}+6z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

故 $\mathbf{grad}\,u(1,1,2)=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$ 在 $P_0\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)$ 处梯度为 0.

例 6 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？最大值是多少？

解 由 $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2-yz$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy-xz$，$\frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-xy$，得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}=1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}=2,$$

从而 $\mathbf{grad}\,u(P_0)=(0,1,2)$，$|\mathrm{grad}\,u(P_0)|=\sqrt{0+1+4}=\sqrt{5}$.

于是，u 在点 P_0 处沿方向 $(0,1,2)$ 的方向导数最大，最大值是 $\sqrt{5}$.

6.10.3 等高线的概念

我们知道，二元函数 $z=f(x,y)$ 在几何直观上表示空间一个曲面，除此之外，在实际应用中，描绘等高线是对二元函数 $z=f(x,y)$ 进行直观描述的又一种方法.

一般地，我们把满足方程 $f(x,y)=k$（k 在函数 f 的值域内）的曲线称为二元函数 f 的等高线. 按照定义，等高线 $f(x,y)=k$ 是函数 f 取已知值 k 的所有点 (x,y) 的集合. 即它表示了在何处函数 f 的图形具有相同的高 k.

等高线的做法：用一系列平面 $z=k$ 截曲面 $z=f(x,y)$ 得到一系列空间曲线（水平截痕），这些曲线在 xOy 面上的投影曲线就是所求的等高线. 所以，如果画出一个函数的若干等高线，并将它们提升（降低）到所对应的高，则函数的图形也就大致得到了. 当按等间距 k 画出一族等高线 $f(x,y)=k$ 时，在等高线相互贴近的地方，曲面较陡峭；而在等高线相互分开的地方，曲面较平坦.（如图6-81所示是假设曲面 $z=f(x,y)$ 是一座山体的表面时等高线的绘制方法，即 k 分别取值为 100m、200m、300m 和 400m 的等高线）.

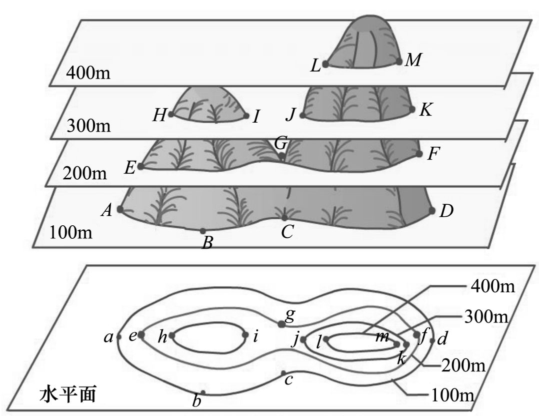

图 6-81

由于等高线 $f(x,y)=k$ 上任何一点 $P(x,y)$ 处的法线的斜率为

$$-\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=-\frac{1}{\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)}=\frac{f_y}{f_x},$$

这个方向恰好就是梯度 $\mathbf{grad}\,f(x,y)$ 的方向. 这个结果表明：函数在一点的梯度方向与等高线在该点的一个法线方向相同，它的指向为从数值较低的等高线指向数值较高的等高线，而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数（如图 6-82 所示）.

根据上述结果，如果我们考虑一山丘的地形图（等高线图），用 $f(x,y)$ 表示坐标 (x,y) 的点的海拔高度，则通过与等高线垂直的方式我们可以画出一条最陡的上升曲线（如图 6-83 所示）.

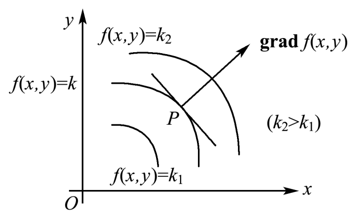

图 6-82

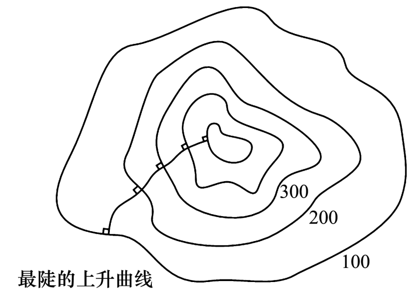

图 6-83

【知识与能力拓展】

1. 复习应用 Mathematica 软件求多元函数偏导数的指令.

2. 上机演练：

(1)求函数 $u=x^2-xy+z^2$ 在点 $(1,0,1)$ 沿到点 $(3,-1,3)$ 的方向的方向导数；

(2)求函数 $u=2x^3y-xy-3y^2z$ 在点 $P(1,2,1)$ 处的梯度及其模.

【学习效果评估】

(A)

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处，沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

3. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

4. 求函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向的方向导数.

5. 已知函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathbf{grad}f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}f(1,1,1)$.

(B)

1. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上点 $(1,1,1)$ 处，沿曲线在该点的切线正方向（对应于 t 增大的方向）的方向导数.

2. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处，沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

3. 函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大？并求此方向导数的最大值.

(C)

1. 完成本节引例.

6.11 多元函数的极值

本节介绍多元函数的极值和最值的存在条件和求解方法、拉格朗日乘数法以及最小二乘法等.

【知识目标】

理解多元函数极值和最值概念;会计算多元函数的极值和最值;学会运用拉格朗日乘数法求函数条件极值;记忆最小二乘法.

【能力目标】

应用多元函数极值相关概念和方法求解实际问题.

【案例引入】

引例 某对外出口公司生产两种高尔夫球.一种以 3 美元销售,另一种以 2 美元销售. 销售 x 千个 3 美元的球和 y 千个 2 美元的球的总收入(以千美元计)为 $R(x,y)=3x+2y$. 公司测定生产 x 千个 3 美元的球和 y 千个 2 美元的球的总成本(以千美元计)为 $C(x,y)=2x^2-2xy+y^2-9x+6y+7$. 公司为了获得最大利润,每种类型的球应该生产和销售多少千个?

很显然,总利润 $P(x,y)$ 为

$$P(x,y)=R(x,y)-C(x,y)=-2x^2+2xy-y^2+12x-4y-7,$$

求最大利润即为求二元函数 $P(x,y)$ 的最大值. 为此,在本节我们先来讨论二元函数的极值,进而讨论其最值.

【知识正文】

在一元函数中,可以用导数求函数的极值,对于多元函数,同样也可以利用偏导数研究极值问题.

6.11.1 多元函数的极值

在这里,我们以二元函数为例来讨论函数的极值.

定义 1 **设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义,如果对于该邻域内异于 $P_0(x_0,y_0)$ 的任意点 $P(x,y)$,都满足不等式**

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极大值 $f(x_0,y_0)$,点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的极大值点;如果都满足不等式

$$f(x,y)>f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处取得极小值 $f(x_0,y_0)$,点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的极小值点.极大值、极小值统称为极值. 使函数取得极值的点称为极值点.

例 1 函数 $z=x^2+4y^2$ 在点(0,0)处有极小值. 因为对于点(0,0)的任一邻域内异于(0,0)的点,函数值都为正,而在点(0,0)处的函数值为零. 从几何上看这是显然的,因为点(0,0,0)是开口向上的椭圆抛物面 $z=x^2+4y^2$ 的顶点(如图 6-84 所示).

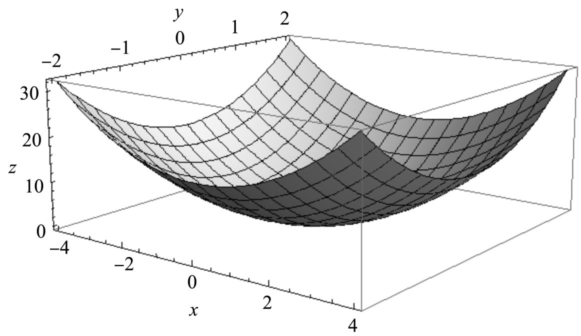

图 6-84

例 2　函数 $z=3-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0,0)处有极大值 3. 因为在点(0,0)处函数值为 3，而对于点(0,0)的任一邻域内异于(0,0)的点，函数值都小于 3，从几何上看，点(0,0,3)是开口向下的下半圆锥面 $z=3-\sqrt{x^2+y^2}$ 的顶点(如图 6-85 所示).

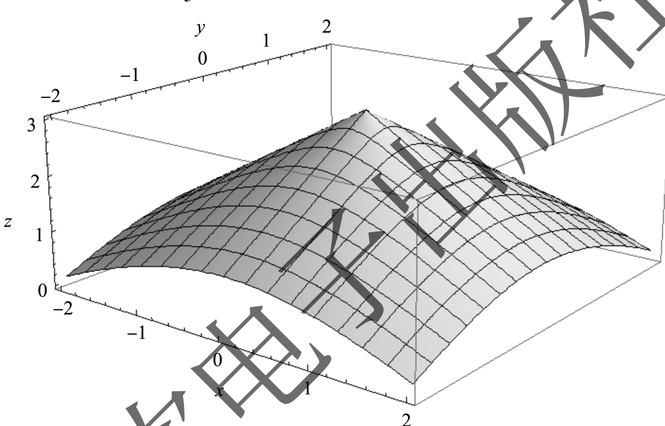

图 6-85

例 3　函数 $z=xy$ 在点(0,0)处既不取得极大值也不取得极小值. 因为在点(0,0)处的函数值为零，而在点(0,0)的任一邻域内，总有使函数值为正的点，也有使函数值为负的点(如图 6-86 所示).

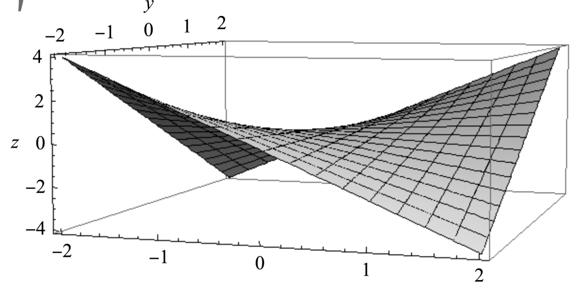

图 6-86

以上关于二元函数的极值概念，可推广到 n 元函数. 设 n 元函数 $u=f(P)$ 在点 P_0 的某一邻域内有定义，如果对于该邻域内异于 P_0 的任何点 P 都适合不等式

$$f(P)<f(P_0)\ (\text{或 } f(P)>f(P_0))，$$

则称函数 $f(P)$ 在点 P_0 处取得极大值(或极小值) $f(P_0)$.

下面研究二元函数极值存在的条件.

定理 1(极值存在的必要条件)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处取得极值，则它在该点的偏导数必然为零，即

$$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明　不妨设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极大值，依照极大值的定义，在点 (x_0,y_0) 的某邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y) 都满足不等式

$$f(x,y)<f(x_0,y_0).$$

特殊地，在该邻域内取 $y=y_0$ 且 $x\neq x_0$ 的点，也应满足不等式

$$f(x,y_0)<f(x_0,y_0),$$

这表明一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，因此必有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)=0.$$

同理可证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}=f_y(x_0,y_0)=0.$$

从几何上看，这时如果曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处有切平面，则切平面

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

成为平行于 xOy 坐标面的平面 $z-z_0=0$.

类似的，如果三元函数 $u=(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 具有偏导数，则它在点 (x_0,y_0,z_0) 具有极值的必要条件为

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,f_y(x_0,y_0,z_0)=0,f_z(x_0,y_0,z_0)=0.$$

与一元函数类似，凡是能使 $f_x(x,y)=0,f_y(x,y)=0$ 同时成立的点 (x_0,y_0) 称为函数 $z=f(x,y)$ 的**驻点**. 由定理 1 可知，具有偏导数的函数的极值点必定是驻点. 但是函数的驻点不一定是极值点，例如由例 3 知，点 $(0,0)$ 是函数 $z=xy$ 的驻点，但是函数在该点并无极值.

怎样判定一个驻点是否是极值点呢? 下面的定理回答了这个问题.

定理 2(极值存在的充分条件)　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$，令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A,f_{xy}(x_0,y_0)=B,f_{yy}(x_0,y_0)=C$$

则函数 $f(x,y)$ 在驻点 $P_0(x_0,y_0)$ 处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论.

由定理 1 与定理 2，求具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 的极值的步骤如下：

第一步　解方程组

$$f_x(x,y)=0,f_y(x,y)=0,$$

求得函数 $z=f(x,y)$ 的一切驻点.

第二步　对于每一个驻点 (x_0,y_0)，求出二阶偏导数的值 A,B 和 C.

第三步　确定 $AC-B^2$ 的符号，按定理 2 的结论判定 (x_0,y_0) 是否是极值点，是极大值点

还是极小值点.

第四步　计算极值点处的函数值.

例 4　求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解　先解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases},$$

求得驻点为(1,0),(1,2),(−3,0),(−3,2).

再求出二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y)=6x+6, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-6y+6.$$

在点 (1,0) 处，$AC-B^2=12\times 6>0$，又 $A>0$，所以函数在 (1,0) 处有极小值$f(1,0)=-5$；

在点 (1,2) 处，$AC-B^2=12\times(-6)<0$，所以 $f(1,2)$ 不是极值；

在点 (−3,0) 处，$AC-B^2=-12\times 6<0$，所以 $f(-3,0)$ 不是极值；

在点 (−3,2) 处，$AC-B^2=-12\times(-6)>0$，又 $A<0$，所以函数在 (−3,2) 处有极大值 $f(-3,2)=31$.

讨论函数的极值问题时，如果函数在所讨论的区域内具有偏导数，则由定理 1 可知，极值只可能在驻点处取得. 然而，如果函数在个别点处的偏导数不存在，这些点当然不是驻点，但也可能是极值点. 例如，在例 2 中，函数 $z=3-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 (0,0) 处的偏导数不存在，但该函数在点 (0,0) 处却具有极大值 3. 因此，在考虑函数的极值问题时，除了考虑函数的驻点外，如果有偏导数不存在的点，那么对这些点也应当加以考虑.

6.11.2　多元函数的最大值与最小值

与一元函数相类似，可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值.

1. 有界闭区域上连续函数的最值

在本章第一节中已经指出，如果 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上必定能取得最大值和最小值. 显然，使函数取得最大值或最小值的点既可能在 D 的内部，也可能在 D 的边界上. 因此只需求出 $f(x,y)$ 在各驻点和不可导点的函数值及在边界点上的最大值和最小值，然后加以比较即可.

因此，假定函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续、偏导数存在且驻点只有有限个，则求函数 $f(x,y)$ 的最大值和最小值的一般步骤为：

(1) 求函数 $f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点处的函数值；

(2) 求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值和最小值；

(3) 将前两步得到的所有函数值进行比较，其中最大者就是最大值，最小者就是最小值.

例 5　求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x=0$, $y=0$ 及 $x+y=6$ 所围成三角形闭区域 D 上的最大值与最小值.

解　首先求出三角形闭区域 D（如图 6-87 所示）内部的驻点，解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=xy(8-3x-2y)=0 \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$$

得 D 内唯一的驻点 $(2,1)$，且 $f(2,1)=4$.

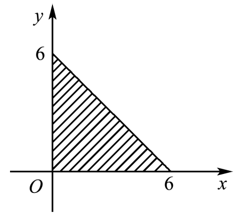

图 6-87

其次，再求函数在 D 的边界上的最值.

(1)在直线段 $x=0(0\leqslant x\leqslant 6)$上，显然 $f(0,y)=0$；

(2)在直线段 $y=0(0\leqslant y\leqslant 6)$上，显然 $f(x,0)=0$；

(3)在直线段 $x+y=6(0\leqslant x\leqslant 6)$上，函数可转化为一元函数，记作

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x,6-x)=x^2(6-x)(4-x-6+x)\\&=2x^3-12x^2\quad(0\leqslant x\leqslant 6).\end{aligned}$$

因

$$\varphi'(x)=6x^2-24x,$$

令 $\varphi'(x)=0$ 求得区间内部的驻点 $x=4$. 于是 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,6]$ 上的最大值为 $\max\{\varphi(0),\varphi(4),\varphi(6)\}=\max\{0,-64,0\}=0$，最小值为 $\min\{0,-64,0\}=-64$.

综上所述，函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值在 D 的内部点 $(2,1)$ 处取得，且最大值为 $f(2,1)=4$，最小值在 D 的边界上点 $(4,2)$ 处取得，且最小值为 $f(4,2)=-64$.

例 6 求函数 $f(x,y)=xy(x+y-3)$ 在区域

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 4-y,0\leqslant y\leqslant 4\},$$

上的最大值与最小值.

解 作区域 D 的图如图 6-88 所示，先求函数一阶偏导数为零的点，得方程组

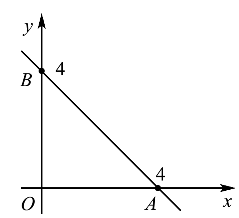

图 6-88

$$\begin{cases}f_x(x,y)=y(x+y-3)+xy=0\\f_y(x,y)=x(x+y-3)+xy=0\end{cases}.$$

解方程组可得驻点为$(0,0)$，$(1,1)$，$(0,3)$，$(3,0)$，则 $f(0,0)=0$，$f(1,1)=-1$，$f(0,3)=0$，$f(3,0)=0$，再讨论函数在区域边界上的最大值和最小值.

(1)在线段 OA 上，$y=0$，所以 $f(x,y)\equiv 0$；

(2)在线段上 OB，$x=0$，所以 $f(x,y)\equiv 0$；

(3)在线段 AB 上，有 $y=4-x,0\leqslant x\leqslant 4$，这样有 $f(x)=x(4-x)$，容易知道此函数在 $x=2$ 处有极大值 $f(2)=4$.

比较以上各值可知，在点 $(2,2)$ 处取到最大值 4，在点$(1,1)$处取到最小值 -1.

2.实际问题中的最大值与最小值

在实际问题中，如果根据问题的性质，知道函数 $f(x,y)$ 的最大值(最小值)一定在 D 的内部取得，而函数在 D 内有唯一驻点，那么可以肯定该驻点的函数值就是函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值(最小值).

例 7 某厂要用铁板作成一个体积为 2 立方米的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省.

解 设水箱的长为 x 米，宽为 y 米，则其高应为 $\frac{2}{xy}$ 米，此水箱所用材料的面积为

$$A=2\left(xy+y\cdot\frac{2}{xy}+x\cdot\frac{2}{xy}\right),$$

即

$$A=2\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)\quad(x>0,\ y>0).$$

可见所用材料面积 A 是 x 和 y 的二元函数，这样的函数称为目标函数. 下面求使目标函数取得最小值的点 (x,y).

令

$$\begin{cases}A_x=2\left(y-\dfrac{2}{x^2}\right)=0\\ A_y=2\left(x-\dfrac{2}{y^2}\right)=0\end{cases},$$

解方程组得

$$x=\sqrt[3]{2},\ y=\sqrt[3]{2}.$$

根据题意可知，在体积一定的条件下，水箱所用材料面积的最小值一定存在，并在开区域 $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 内取得. 又函数在 D 内只有唯一的驻点$(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$，因此可断定当 $x=\sqrt[3]{2}$，$y=\sqrt[3]{2}$ 时，A 取得最小值. 就是说，当水箱的长为 $\sqrt[3]{2}$ 米、宽为 $\sqrt[3]{2}$ 米，高为 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$ 米时，水箱所用的材料最省.

从这个例子还可看出，在体积一定的长方体中，以立方体的表面积为最小.

例 8　求解本节引例.

解　由引例可知，总利润 $P(x,y)$ 为

$$P(x,y)=R(x,y)-C(x,y)=-2x^2+2xy-y^2+12x-4y-7.$$

解方程组

$$\begin{cases}P_x(x,y)=-4x+2y+12=0\\ P_y(x,y)=2x-2y-4=0\end{cases},$$

求得唯一驻点 $(4,2)$. 根据问题的实际意义，总利润函数 $P(x,y)$ 必取得最大值，因此 $P(x,y)$ 在点 $(4,2)$ 处取得最大值 $P(4,2)=13$，因此公司必须生产和销售 4 千个 3 美元的高尔夫球和 2 千个 2 美元的高尔夫球，可获得最大利润 13 千美元.

例 9　某工厂在生产中使用甲、乙两种原料. 已知使用 x 单位甲种原料，使用 y 单位乙种原料可生产 P 单位的产品，且

$$P(x,y)=10xy+20.2x+30.3y-10x^2-5y^2.$$

已知甲、乙两种原料每单位的价格分别为 20 元和 30 元，产品的单位售价为 100 元，产品的固定成本为 1000 元，求该工厂的最大利润.

解　设 L 为该工厂的利润，则有

$$\begin{aligned}L(x,y)&=100P(x,y)-(20x+30y+1000)\\&=1000xy+2000x+3000y-1000x^2-500y^2-1000\quad(x>0,y>0).\end{aligned}$$

由方程组

$$\begin{cases}L_x(x,y)=1000y-2000x+2000=0\\ L_y(x,y)=1000x-1000y+3000=0\end{cases},$$

求得唯一驻点 $(5,8)$. 根据问题的实际意义，L 必可取得最大值. 因此 $L(x,y)$ 在点 $(5,8)$ 处取得最大值 $L(5,8)=16000$，于是该工厂的最大利润为 16000 元.

6.11.3* 条件极值与拉格朗日乘数法

上面所讨论的极值问题，对于函数的自变量，除了限制在函数的定义域内以外，并无其它要求，称这类极值为**无条件极值**.

但在实际问题中，有时会遇到对函数的自变量还有附加约束条件的极值问题，这类带有约束条件的函数极值问题称为**条件极值**问题.

例如，表面积为 a^2 而体积为最大时的长方体，各棱长长度是多少？

设长方体的三条棱的长度分别为 x,y,z，则体积 $V=xyz$. 又因表面积为 a^2，则问题就是求体积函数在约束条件 $2(xy+yz+xz)=a^2$ 下的最大值.

求解条件极值问题一般有两种方法. 一种方法就是将条件极值化为无条件极值来处理. 如本例，可由约束条件 $2(xy+yz+xz)=a^2$ 将 z 表成 x,y 的函数

$$z=\frac{a^2-2xy}{2(x+y)}.$$

再把它代入 $V=xyz$ 中，于是问题就化为求

$$V=\frac{x}{2}\left(\frac{a^2-2xy}{x+y}\right)$$

在其定义域 $x>0,y>0$ 内的最大值，这是无条件极值问题；另一种求条件极值的方法是下面要介绍的拉格朗日乘数法.

现在求函数

$$z=f(x,y) \tag{6-15}$$

在约束条件

$$\varphi(x,y)=0 \tag{6-16}$$

下的极值.

如果函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得条件极值，那么相应有

$$\varphi(x_0,y_0)=0. \tag{6-17}$$

假定在 (x_0,y_0) 的某一邻域内 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均有连续的一阶偏导数，而 $\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$. 由隐函数存在定理可知，式(6-16)确定一个连续且有连续导数的函数 $y=\psi(x)$，将其代入函数 $z=f(x,y)$，结果得到一个关于 x 的一元函数

$$z=f[x,\psi(x)],$$

而函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取得条件极值，也就是相当于函数 $z=f[x,\psi(x)]$ 在 $x=x_0$ 取得无条件极值. 由一元可导函数取得极值的必要条件知

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0.$$

由隐函数求导公式，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}.$$

从而有

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=0, \tag{6-18}$$

式(6-17)、式(6-18)就是函数(6-15)在条件(6-16)下在 (x_0,y_0) 处取得极值的必要条件.

设 $\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=-\lambda$，上述必要条件就变为

$$\begin{cases}f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0\\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0.\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{cases}\tag{6-19}$$

引进辅助函数

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

则不难看出，式(6-19)中前两式就是

$$L_x(x_0,y_0)=0,\ L_y(x_0,y_0)=0,$$

函数 $L(x,y)$ 称为**拉格朗日函数**，参数 λ 称为**拉格朗日乘子**.

由以上讨论，可以归纳出利用拉格朗日乘数法求函数条件极值的方法：

拉格朗日乘数法　求函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，一般步骤是：

(1)构造拉格朗日函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

(2)由方程组

$$\begin{cases}f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0\\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0,\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

解出 x,y 及 λ，这样得到的(x,y)就是函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点；

(3)判别 (x,y) 是否是极值点，一般可以根据具体问题的性质进行判别.

拉格朗日数乘法还可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形. 如函数 $u=f(x,y,z,t)$ 在附加条件 $\varphi(x,y,z,t)=0$，$\psi(x,y,z,t)=0$ 下的极值，可以先构成拉格朗日函数

$$L(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda_1\varphi(x,y,z,t)+\lambda_2\psi(x,y,z,t),$$

其中 λ_1,λ_2 均为常数，由 $L(x,y,z,t)$ 关于 x,y,z,t 的偏导数为零的方程组解出 x,y,z,t，即得所求条件极值的可能极值点.

例 10　求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积.

解　设长方体的三条棱长分别为 x,y,z，则问题就是在条件

$$\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0,$$

下，求函数

$$V=xyz\quad(x>0,y>0,z>0)$$

的最大值. 构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2),$$

求其对 x、y、z 的偏导数，并使之为零，得

$$\begin{cases}yz+2\lambda(y+z)=0\\ xz+2\lambda(x+z)=0,\\ xy+2\lambda(y+z)=0\end{cases}$$

再与 $\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0$ 联立求解.

因 x,y,z 都不等于零，所以可得

$$\frac{x}{y}=\frac{x+z}{y+z},\ \frac{y}{z}=\frac{x+y}{x+z}.$$

由以上两式解得
$$x=y=z.$$

将此代入 $\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0$，便得

$$x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

这是唯一可能的极值点. 因为由问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得. 也就是说，表面积为 a^2 的长方体中，以棱长为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ 的正方体的体积为最大，最大体积 $V=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$.

例 11 某工厂通过电视和报纸两种媒体做广告，已知销售收入 R（万元）与电视广告费 x（万元）、报纸广告费 y（万元）的函数关系为

$$R(x,y)=15+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2,$$

如果计划提供 1.5 万元广告费，求最佳的广告策略.

解 广告费 1.5 万元时的最佳的广告策略就是在 $x+y=1.5$ 的条件下求 $R(x,y)$ 的最大值问题，设拉格朗日函数为

$$L(x,y)=15+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2+\lambda(x+y-1.5).$$

解方程组

$$\begin{cases}L_x(x,y)=14-8y-4x+\lambda=0\\ L_y(x,y)=32-8x-20y+\lambda=0,\\ x+y-1.5=0\end{cases}$$

得唯一可能极值点 $(0,1.5)$.

由问题本身可知最大值一定存在，所以当报纸广告费 $y=1.5$ 万元时，销售收入达到最高为 $R(0,1.5)=40.5$ 万元，即只做报纸广告为最佳策略.

例 12 某公司有两种产品，市场每年的需求量分别为 1200 件和 2000 件，如果分批生产，其每批生产准备费分别为 40 元和 70 元，每年每件产品库存费为 0.15 元. 设两种产品每批总生产能力为 1000 件，试确定两种产品每批生产的批量，使生产准备费和库存费之和最少.

解 设两种产品每批生产的批量分别为 x 和 y，在均匀售出情况下平均库存量为批量的一半，一年的库存费为

$$C_1=0.15\left(\frac{x+y}{2}\right)=0.075(x+y).$$

一年的批次分别为 $\frac{1200}{x}$ 和 $\frac{2000}{y}$，所以一年的总生产准备费为

$$C_2=40\times\frac{1200}{x}+70\times\frac{2000}{y}=4000\left(\frac{12}{x}+\frac{35}{y}\right),$$

于是，总费用为

$$C=C_1+C_2=0.075(x+y)+4000\left(\frac{12}{x}+\frac{35}{y}\right),$$

其中约束条件为　　　　　　　　$x+y=1000.$

设拉格朗日函数为

$$L(x,y)=0.075(x+y)+4000\left(\frac{12}{x}+\frac{35}{y}\right)+\lambda(x+y-1000),$$

解方程组

$$\begin{cases}L_x=0.075-\dfrac{4800}{x^2}+\lambda=0\\ L_y=0.075-\dfrac{140000}{y^2}+\lambda=0\\ x+y-1000=0\end{cases},$$

得 $x=369$，$y=631$，这是唯一可能的极值点．由问题的实际意义知存在总费用的最小值，故当两种产品的批量分别是 369 和 631 时总费用最小．

6.11.4* 最小二乘法

许多工程问题常常需要用到数理统计中的回归分析，也就是根据实际测量得到的一组数据来找出变量间的函数关系的近似表达式．通常把这样得到的函数的近似表达式叫做**经验公式**．这是一种广泛采用的数据处理方法．下面通过实例来介绍一种常用的建立经验公式的方法．

例 13　为测定某刀具的磨损速度，按每隔一小时测量一次刀具厚度的方式，得到如表 6-4 所示的实测数据：

表 6-4

顺序编号 i	0	1	2	3	4	5	6	7
时间 t_i /小时	0	1	2	3	4	5	6	7
刀具厚度 y_i /毫米	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8

试根据这组实测数据建立变量 y 与 t 之间的经验公式 $y=f(t)$．

解　为确定 $f(t)$ 的类型，利用所给数据在坐标纸上画出时间 t 与刀具厚度 y 的散点图(如图 6-89 所示)．

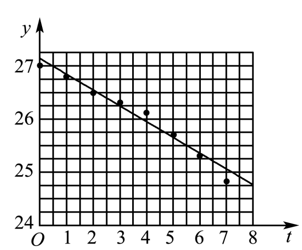

图 6-89

观察此图易发现，所求函数 $y=f(t)$ 可近似看作线性函数，因此可设

$$f(t)=at+b,$$

其中 a 和 b 是待定常数．但因为图中各点并不在同一条直线上，所以，只能要求选取这样的 a,b，使得 $f(t)=at+b$ 在 $t_0,t_1,\cdots,t_7$ 处的函数值与实验数据 $y_0,y_1,\cdots,y_7$ 相差都很小．就是要使偏差 $y_i-f(t_i)(i=0,1,2,\cdots,7)$ 都很小．为了保证每个这样的偏差都很小，可考虑选取常数 a，b，使

$$M=\sum_{i=0}^{7}\left[y_i-(at_i+b)\right]^2$$

最小．这种根据偏差的平方和为最小的条件来选择常数 a,b 的方法叫做**最小二乘法**．一般数学软件中曲线拟合方法的依据就是最小二乘法．

把 M 看成自变量 a 和 b 的一个二元函数，那么问题就可归结为求函数 $M=M(a,b)$ 在哪些点处取得最小值，令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=-2\sum\limits_{i=0}^{7}[y_i-(at_i+b)]t_i=0\\ \dfrac{\partial M}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=0}^{7}[y_i-(at_i+b)]=0\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{7}[y_i-(at_i+b)]t_i=0\\ \sum\limits_{i=0}^{7}[y_i-(at_i+b)]=0\end{cases},$$

整理得

$$\begin{cases}a\sum\limits_{i=0}^{7}t_i^2+b\sum\limits_{i=0}^{7}t_i=\sum\limits_{i=0}^{7}y_it_i\\ a\sum\limits_{i=0}^{7}t_i+8b=\sum\limits_{i=0}^{7}y_i\end{cases},$$

由于

$$\sum_{i=0}^{7}t_i=28,\ \sum_{i=0}^{7}t_i^2=140,\ \sum_{i=0}^{7}y_i=208.5,\ \sum_{i=0}^{7}y_it_i=717.0,$$

则有关于 a,b 的方程组

$$\begin{cases}140a+28b=711\\ 28a+8b=208.5\end{cases},$$

解此方程组，得到

$$a=-0.3036,b=27.125,$$

于是所求经验公式为

$$y=f(t)=-0.3036t+27.125.$$

根据上式算出的 $f(t_i)$ 与实测 y_i 有一定的偏差，如表 6-5 所示. 其偏差的平方和 $M=0.108165$，其平方根 $\sqrt{M}=0.329$. 我们把 $\sqrt{M}$ 称为**均方误差**，它的大小在一定程度上反映了用经验公式近似表达原来函数关系的近似程度的好坏.

表 6-5

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7
实测 y_i	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8
计算 $f(t_i)$	27.125	26.821	26.518	26.214	25.911	25.607	25.303	25.000
偏差	−0.125	−0.021	−0.018	−0.086	0.189	0.093	−0.003	−0.200

【知识与能力拓展】

1. 学习用 Mathematica 软件计算二元函数极值和最值的相关指令.

2.学习编写求二元函数极值和最值的 Mathematica 指令序列.

3.上机演练:求下列函数的极值

$$f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2.$$

【学习效果评估】

(A)

1.求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

2.求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

3.求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

4.求函数 $f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$ 的极值.

5.从斜边之长为 l 的一切直角三角形中求有最大周长的直角三角形.

6.要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池,应如何选择水池的尺寸方可使它的表面积最小?

(B)

1.求 $z=x+y+1$ 在闭区域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 上的最大值与最小值.

2.求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

3.将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体,问矩形的边长各为多少时才可使圆柱体的体积为最大?

4.求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

5.抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆,求原点到该椭圆的最长与最短距离.

(C)

1.用面积为 108 平方米的木板做一个无盖长方体木箱,若不计木板的原度,怎样制作才能使其容积最大?

2.设某厂生产甲、乙两种产品,产量分别为 x,y(千只),其利润函数为

$$L(x,y)=6x-x^2+16y-4y^2-2\text{(单位:万元)}.$$

已知生产这两种产品时,每千件产品均需消耗某种原料 2000kg. 现有该原料 12000kg,问两种产品各生产多少千件时,总利润最大? 最大利润为多少?

3.完成本单元的项目导学.

单元训练

一、知识评估

1.单项选择题

(1)向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与二向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的位置关系是(　　).

(A)共面　　　　(B)共线

(C)垂直　　　　(D)斜交

(2)设向量 $\boldsymbol{a}$ 与三轴正向夹角依次为 α、β、γ，当 $\cos\beta=0$ 时有(　　).

(A) $\boldsymbol{a}\perp yOz$ 面　　(B) $\boldsymbol{a}\,/\!/\,yOz$ 面

(C) $\boldsymbol{a}\,/\!/\,zOx$ 面　　(D) $\boldsymbol{a}\perp xOy$ 面

(3)向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=2$、$|\boldsymbol{b}|=2$、$|\boldsymbol{c}|=1$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的长度是(　　).

(A)6　　(B)4

(C) $\sqrt{14}$　　(D)3

(4)已知球面经过 $(0,-3,1)$ 且与 xOy 面的交成圆周 $\begin{cases}x^2+y^2=16\\ z=0\end{cases}$，则此球面的方程是(　　).

(A) $x^2+y^2+z^2+6z+16=0$　　(B) $x^2+y^2+z^2-16z=0$

(C) $x^2+y^2+z^2-6z+16=0$　　(D) $x^2+y^2+z^2+6z-16=0$

(5)下列方程中所示曲面是双叶旋转双曲面的是(　　).

(A) $x^2+y^2+z^2=1$　　(B) $x^2+y^2=4z$

(C) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$　　(D) $\dfrac{x^2+y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=-1$

(6)对 $z=f(x,y)$，下列命题正确的是(　　).

(A) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 连续

(B) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 可微

(C) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 的极限存在

(D) $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 连续，则 $f(x,y)$ 必可微

(7)若 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处具有任意阶的偏导数，则(　　).

(A) $f(x,y)$ 在 (x,y) 处必连续　　(B) $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微

(C) $f(x,y)$ 在 (x,y) 处极限存在　　(D)以上结论均未必正确

(8)对于二元函数 $z=f(x,y)$，下列结论正确的是(　　).

(A) $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$，则 $f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不存在二阶偏导数

(C) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

(D)当 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微时，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处未必连续

2.填空题

(1) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}=$__________.

(2)在 z 轴上点__________与 $M_1(1,2,3)$ 和 $M_2(-2,-1,1)$ 的距离相等.

(3)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{c}=(-1,0,1)$，求向量 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$ 的坐标表示

式为______________.

(4)设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，则向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 的分解式为______________；

(5)已知两点 $M_1(0,1,2)$，$M_2(1,-1,0)$，则向量$\overrightarrow{M_1M_2}=$ ________，$-2\overrightarrow{M_1M_2}=$________.

(6)平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量为______________.

(7)判断下列各组向量是否平行或垂直：

(a)$2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，$4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$：______________；

(b) $(2,0,-3)$，$(3,1,2)$：______________ ；

(8)写出适合下列条件的旋转曲面方程：

(a)把曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=6\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周：______________；

(b)把曲线 $\begin{cases}z=\sin y\\ x=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周：______________；

(9)指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形：

(a) $x=2$　　______________、______________；

(b) $y=x+1$　　______________、______________；

(c) $x^2+y^2=4$　　______________、______________；

(d) $x^2-y^2=1$　　______________、______________.

(10)已知点 $A(-4,-2,1)$，$B(1,-5,-3)$，$C(-1,0,0)$，$D(1,0,2)$，$E(0,0,3)$，则点 $B(1,-5,-3)$在第______________卦限，点______________为 zOx 坐标面上的点，点______________为 x 轴上的点，点______________既在 yOz 坐标面上也在 zOx 坐标面上.

(11)点 $P(-3,2,-1)$关于 xOy 坐标面的对称点是______________，关于 yOz 面的对称点是______________，关于 zOx 坐标面的对称点是______________，关于 x 轴的对称点是______________，关于 y 轴的对称点是______________，关于 z 轴的对称点是______________，关于原点的对称点是______________.

(12)平面 $3x-y+2z+1=0$ 的法向量为______________.

(13)过点 $A(3,-2,1)$且以 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$为法向量的平面方程是______________.

(14)过点$(1,-2,3)$且与平面 $7x-3y+z-6=0$ 平行的平面方程是______________.

(15) $z=x\ln(xy)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______________，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______________.

(16) $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $f_x(x,1)=$______________.

(17)函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数为______________.

(18)函数 $z=xyz$ 沿 $(5,1,2)$ 到 $(9,4,14)$ 的方向的方向导数为 ______________.

(19)函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 在点 ______________ 处取得最大值______________.

3.证明与计算题

(1)求证以 $O(0,0,0)$,$A(1,1,0)$,$B(0,1,1)$ 为顶点的三角形是等边三角形.

(2)用向量法证明三角形的中位线定理.

(3)已知 $M(3,1,\sqrt{2})$,$N(2,2,0)$,求向量$\overrightarrow{MN}$ 的模、方向余弦、方向角和单位向量.

(4)已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$,且 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

(5)已知向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,且 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,试计算 $|(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$.

(6)已知$\overrightarrow{OA}=(3,0,1)$,$\overrightarrow{OB}=(0,1,3)$,求 ΔOAB 的面积.

(7)已知三点 $M_1(1,0,3)$,$M_2(3,3,1)$,$M_3(3,1,3)$,求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

(8)求与向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角等于$\dfrac{\pi}{3}$,且 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=5$,求 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$.

(9)设平行四边形二边为向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$,$\boldsymbol{b}=(2,-1,3)$,求其面积.

(10)证明:已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两非零不共线向量,求证:$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

(11)设质量为 100 千克的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$,试计算重力所做的功(长度单位为米,重力方向为 z 轴负方向,取重力加速度为 $9.8\mathrm{m/s^2}$).

(12)求 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域.

(13)求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

(14)讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在(0,0)点的连续性.

(15)若 $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(16)设 $z=f(2x-y,y\sin x)$,其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(17)设 $u=x^2+y^2+z^2$,$z=x^2\cos y$,求 $\mathrm{d}u$.

(18)设 $z=z(x,y)$ 为由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的隐函数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(19)求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

(20)函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大?并求此方向导数最大值.

(21)求函数 $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)+1-\dfrac{x^3}{15}-\dfrac{y^3}{4}$ 的极值.

二、单元项目

1.某废品公司正在设计一个敞口的长方体废品箱,其容积是 32 立方米.废品箱底部的制造成本是每平方米 50 元,而侧面的成本是每平方米 40 元,求使得总成本最小的废品箱的尺寸.

2.假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品,两个市场的需求函数分别是 $P_1=18-2Q_1$,$P_2=12-Q_2$,其中 Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量),并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$,其中 $Q=Q_1+Q_2$ 为总销量.

(1)若该企业执行价格差别策略,确定两个市场该产品的销量与售价,使企业利润最大;

(2)若实行差别价格,试确定两个市场该产品的销售量和统一价格,使企业利润最大,并比较两种价格策略中哪一个利润最大.