第2章 函数、极限与连续

一、单元概述

函数是微积分讨论的主要对象,极限是研究函数的有效工具. 连续是函数的主要性质之一. 本章主要介绍函数、极限以及函数连续性的概念和性质.

通过本章的学习,掌握函数、极限与连续的基本概念、基本理论和基本性质,为一元微积分的学习奠定必要的函数基础.

二、教学重点与难点

1. 重点:函数、连续的概念,函数极限的计算,函数连续性的判定.
   难点:极限的概念.
2. 解决方案:

极限的概念:从具体的实例出发,通过几何直观和数值计算引出极限的描述性概念.

函数和连续的概念:通过实例分析归纳得出概念.

函数极限的计算:精讲多练,重视"做中学".

2.1 函数及其特性

本节主要介绍函数的概念和函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性等特性,以及反函数、复合函数和初等函数的基本概念.

【知识目标】

理解函数的概念,记忆函数的几种特性,记忆常用函数的图像. 理解反函数和复合函数的概念,记忆初等函数的概念,记忆用函数进行数据拟合的方法和思路.

【能力目标】

运用本节课所学知识建立实际问题的函数关系.

【案例引入】

函数是客观事物变化规律的一种数学抽象,也是微积分学的基本研究对象. 在生产实践和

科学研究过程中，经常需要考察反映两个变量关系的函数.

引例 1　2012 年 7 月，中国人民银行发布了定期存款基准利率，下表表示定期存款准利率 r 与存款时间 t 的对应关系.

时间(t)	3 个月	6 个月	12 个月	24 个月	36 个月	48 个月	60 个月
利率(r)	2.60	2.80	3.00	3.75	4.25	4.25	4.75

引例 2　C 语言标准函数库中开平方函数 $y=\mathrm{sqrt}(x)$ 表示将变量 x 的算术平方根返回到变量 y 中，其函数关系式为 $y=\sqrt{x}$.

引例 3　图 2-1 表示全球陆地表面平均气温 T 随时间 Y 变化的曲线图，清晰地显示出自 1860 年到 2000 年间全球陆地表面平均气温的变化趋势.

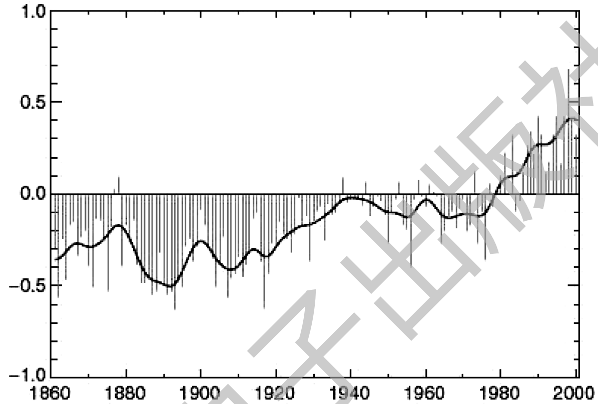

图 2-1

引例 1、引例 2、引例 3 分别通过不同方式阐述了两个变量之间的对应关系，即一个变量随着另一个变量的变化而变化. 引例 1 以列表的方式给出存款基准利率 r 随存款时间 t 的变化而变化的对应关系；引例 2 以解析式的方式给出了变量 y 随变量 x 的变化而变化的对应关系；引例 3 以图像的方式给出了全球陆地表面平均气温 T 随时间 Y 的变化而变化的对应关系. 这种对应关系刻画了客观事物的变化规律，在数学上称为函数关系.

【知识正文】

2.1.1　函数的概念

定义 1　设 x,y 为两个变量，D 为数集，若对 $\forall x\in D$ [1]，按某一对应关系 f，总有唯一确定的数 y 与 x 相对应，则称对应关系 f 是定义在 D 上的函数，习惯上也称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)\qquad (x\in D),$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，也称对应于自变量 x 的函数值.

把函数看成一个输入输出过程有利于对函数概念的理解(这一思想对理解复合函数尤其方

〔1〕“∀”表示“任意”

便),输入 x 值,输出 y 值. 更形象地,把函数 f 看成一台机器,输入 x 值,经过机器 f 的加工,输出 y 值(如图 2-2 所示).

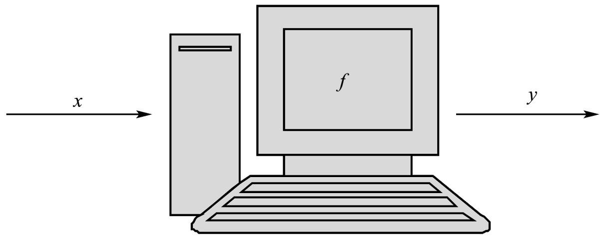

图 2-2

把数集 D 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域. 当 x 取遍 D 时,其对应的函数值 $f(x)$ 所构成的数集叫做函数的值域(如图 2-3 所示).

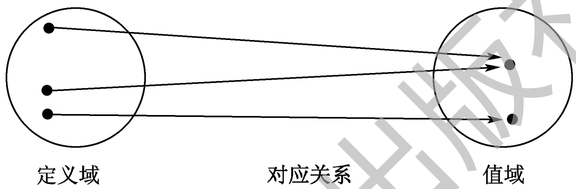

图 2-3

对于函数 $y=f(x)$,当该函数有实际意义时,它的定义域按实际意义确定. 如引例 1 中定期存款基准利率 r 是存款时间 t 的函数,该函数的定义域为 $\{3,6,12,24,36,48,60\}$;引例 3 中全球陆地表面平均气温 T 是时间 Y 的函数,该函数的定义域为 $[1860,2000]$.

当函数没有实际意义时,它的定义域是指使函数有意义的一切实数组成的集合,这样的定义域称为**自然定义域**,一般所说的定义域大多指自然定义域. 比如引例 2 中变量 y 是变量 x 的函数,该函数的定义域为 $[0,+\infty)$;又如函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的自然定义域为 $[1,+\infty)$.

表示函数的符号除了常用的 f 外,还可以用诸如 g,F,G 等其它字母来表示,相应的函数记为 $g(x),F(x),G(x)$,有时也可直接记为 $y=y(x)$.

2.1.2 函数的表示方法

函数的表现形式多种多样,其表示方法也有很多种,主要有以下几种:

1.表格法

变量之间的关系,可以用表格的形式表现出来. 当自变量的取值范围是有限个数,或者自变量的取值范围是有限区间的并集,而值域只包含有限个数的情况下,常用表格法. 本节引例 1 就是这种情况. 有时由于条件的限制,只能了解自变量的有限数所对应的函数值,就用表格法表示函数的部分自变量与因变量之间的关系. 表格法的优点是简洁明了,但不容易直接得到函数关于自变量变化的规律或趋势,有一定的局限性.

2.解析法

变量之间的关系,用解析式表达出来,是函数最常用的表示方法,我们所接触的函数大多用这种表示方法. 本节引例 2 就是这种情况. 解析法的特点是准确、全面,但较为抽象.

3.图形法

将变量之间的关系,用坐标系上的图像表达出来,如引例 3. 图形法的特点是较为直观,容易依据图形观察函数的变化规律和趋势,但不全面,有时不准确.

当信息不全面时,也常常描绘仅有函数的有限个点的图形,称为散点图. 散点图虽然不是严格意义上的函数图像,但用途很大,可以参考有关资料了解相关知识.

习惯上常用解析法研究函数,并结合图形法进行直观分析.

2.1.3　函数的图形

对于函数 $y=f(x)$,将平面点集 $\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形. 事实上,函数的图形是函数关系在平面坐标系中的几何表示,而函数关系又是平面图形的解析表达.

第 1 章中已经介绍了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数(这些函数称为基本初等函数)的性质和图像,下面举例介绍几种特殊的函数的图形.

例 1　设函数 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$.

(1) 画出图形.

(2) 计算 $f(-2)$,$f(f(-2))$.

解 (1) 该函数的图形如图 2-4 所示.

(2) $f(-2)=-(-2)=2$,$f(f(-2))=f(2)=2^3=8$.

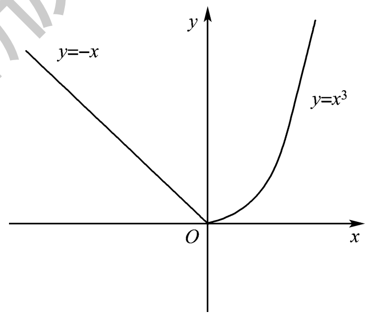

图 2-4

例 2　取整函数. $f(x)=[x]$,符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 如果 $x\in[n,n+1)$(n 为整数),则 $[x]=n$,因此 $[-2]=-2$,$[-1.5]=-2$,$[0.2]=0$,$[3.98]=3$.

这个函数的图形为阶梯型曲线(如图 2-5 所示).

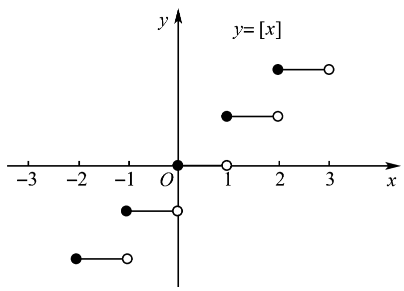

图 2-5

例 3 绝对值函数可以表示成

$$f(x)=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

该函数的图形如图 2-6 所示

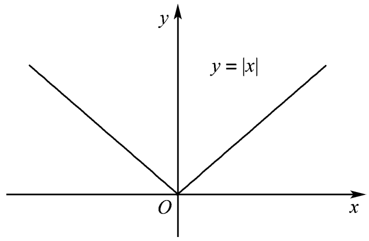

图 2-6

从例 1 至例 3 所讨论的函数都是在自变量的不同变化范围中,对应关系用不同式子来表示的函数,通常称这种函数为**分段函数**.

应当指出,定义域和对应关系是确定函数的两个基本要素.只有二者完全相同,才说两个函数是同一函数.如 $f(x)=2\ln x$ 与 $f(x)=\ln x^2$,由于定义域不相同,故不表示同一函数.

2.1.4 函数的几种特性

在研究函数时,经常需要讨论它的如下几种特性:单调性、奇偶性、有界性和周期性.

1.函数的单调性

观察图 2-7 和图 2-8.图 2-7 中所表示的函数 $y=f(x)$,当自变量 x 增大时,函数值 y 也相应增大.图 2-8 中所表示的函数 $y=f(x)$,当自变量 x 增大时,函数值 y 反而相应减小.图 2-7 所表示的函数 $y=f(x)$ 叫增函数,图 2-8 所表示的函数 $y=f(x)$ 叫减函数.

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$.如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(如图 2-7 所示)(简称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的增函数);如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少(简称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的减函数)(如图 2-8 所示).单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

从图像上看,增函数的图像自左向右逐渐上升,减函数的图像自左向右逐渐下降.

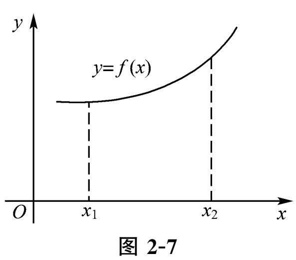

图 2-7

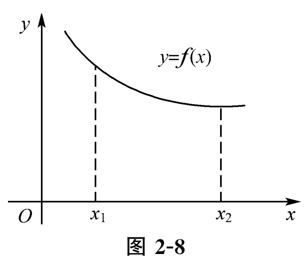

图 2-8

例 4 讨论函数 $y=x^2$ 的单调性.

解 因为对任意 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,当 $x_1<x_2$ 时

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0.$$

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，因此函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的.

同理在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，因而在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数(如图 2-9 所示).

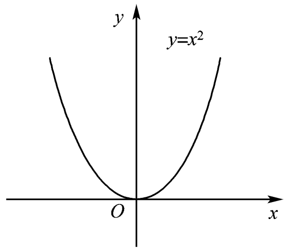

图 2-9

2．函数的有界性

观察图 2-10 和图 2-11. 在图 2-10 中，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内最大不超过 5，最小不小于 -3，其绝对值最大不超过 5. 而图 2-11 中，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的取值没有界限，其绝对值可以无限地大. 图 2-10 中的函数称为有界函数，图 2-11 中的函数称为无界函数.

一般的，设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，如果存在正数 M，使得对于 $\forall x\in D$，所对应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

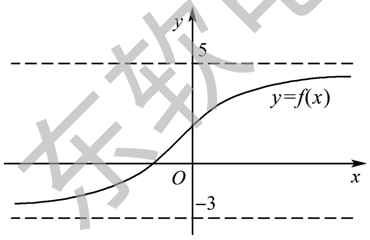

图 2-10

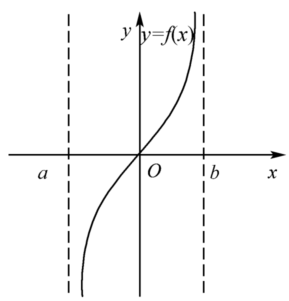

图 2-11

例如，函数 $y=3x+1$ 在 $[0,2]$ 上是有界的. 因为对于 $\forall x\in[0,2]$，都有 $1\leqslant y\leqslant 7$ 成立，即 $|y|\leqslant 7$，这里取 $M=7$，当然也可以取 8，9 或者更大的数. 另外一些三角函数也是有界的，比如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arcsin x$，$y=\arctan x$ 等. 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是无界的，因为不存在这样的 M，使得对于任意 x 都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立.

3．函数的奇偶性

对于函数 $f(x)=2x$，有 $f(-x)=-2x$，即 $f(-x)=-f(x)$，它的图像关于原点对称(如图 2-12 所示)；而对于函数 $f(x)=x^2$，有 $f(-x)=f(x)$，它的图像关于 y 轴对称(如图 2-13 所示).

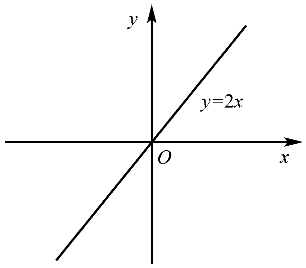

图 2-12

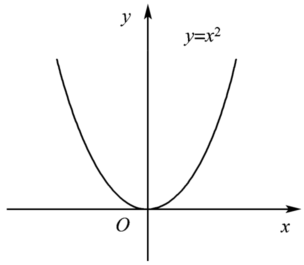

图 2-13

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对于 $\forall x \in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数.如果对于 $\forall x \in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像且关于 y 轴对称.

需要指出,除了奇函数和偶函数外,还存在非奇非偶函数,也存在既奇又偶函数. 例如,函数 $f(x)=x+1$ 既不是奇函数,也不是偶函数.常值函数 $f(x)=0$ 既是奇函数又是偶函数.

例 5 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^3$

(2) $f(x)=x^4+2x^2+1$

(3) $f(x)=x^3+1$

解 (1)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$且关于原点对称,由于

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x),$$

所以 $f(x)=x^3$ 是奇函数.

(2)函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 且关于原点对称,由于

$$f(-x)=(-x)^4+2(-x)^2+1=x^4+2x^2+1=f(x),$$

所以 $f(x)=x^4+2x^2+1$ 是偶函数.

(3)函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 且关于原点对称,但

$$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1\neq -f(x),\text{且 } f(-x)\neq f(x),$$

所以 $f(x)=x^3+1$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

4. 函数的周期性

观察 $y=\sin x$ 的图像(如图 2-14 所示),在这个函数的定义域内,每个长度为 2π 的区间上的函数图像形状相同.体现在函数上就是对任意的 x,$\sin(x+2\pi)=\sin x$ 都成立.

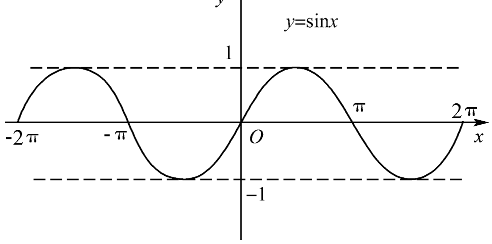

图 2-14

一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在不为零的常数 T，使得对于定义域内的任何一点 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的一个周期，通常所说周期函数的周期是指最小正周期.

$y=\sin x$ 是周期为 2π 的周期函数.

周期性是宇宙的固有特性，有很多函数是周期函数，中学里学习的三角函数都是周期函数（具体内容可参考第 1 章的 1.2 节）.

2.1.5　初等函数

1.反函数的概念

对于函数 $y=x-2$，当 x 每取一个确定的值 x_0 时，y 都有唯一确定的值 (x_0-2) 与它相对应；反过来，若由此式解出 $x=y+2$，当 y 每取一个确定的值 y_0 时，x 都有唯一确定的值 (y_0+2) 与它对应. 从而得到一个以 y 为自变量，以 x 为因变量的新的函数 $x=y+2$，称函数 $x=y+2$ 为函数 $y=x-2$ 的反函数.

定义 2　**设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，其值域为 D_f，若对于 $\forall y\in D_f$，由 $y=f(x)$ 能确定唯一的 $x\in D$ 与其相对应，则得到一个定义域为 D_f，自变量为 y 的函数 $x=\varphi(y)$. 称函数 $x=\varphi(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，习惯上用 x 作自变量，y 作因变量，因而 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，而将 $y=f(x)$ 称为直接函数.**

注：(1) $f[f^{-1}(y)]=y, f[f^{-1}(x)]=x$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图像与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(3) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加或单调减少，则在 I 上存在反函数. 且反函数与直接函数具有相同的单调性.

例 6　求函数 $y=e^{2x-1}$ 的反函数.

解　直接函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$. 以 y 为自变量，x 为因变量，将 x 用 y 表示为 $x=\dfrac{1}{2}(1+\ln y)$，则所求的反函数为 $y=\dfrac{1}{2}(1+\ln x)$，其定义域为 $(0,+\infty)$.

例 7　求函数 $y=3\arcsin(\pi x)$ 的反函数.

解　直接函数的定义域为 $[-\dfrac{1}{\pi},\dfrac{1}{\pi}]$，值域为 $[-\dfrac{3}{2}\pi,\dfrac{3}{2}\pi]$. 以 y 为自变量，x 为因变量，将 x 用 y 表示为 $x=\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{y}{3}$，则所求的反函数为 $y=\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{x}{3}$，其定义域为 $[-\dfrac{3}{2}\pi,\dfrac{3}{2}\pi]$.

2.复合函数的概念

先观察一个例子. 设 $y=2\sin u$ 是 u 的函数，$u=3t+\dfrac{\pi}{4}$ 又是 t 的函数，如果把后一个函数关系式代入前面的函数中就得到 $y=2\sin(3t+\dfrac{\pi}{4})$，该函数在物理学中表示振幅是 2、角频率是 3、初相是 $\dfrac{\pi}{4}$ 的简谐振动. 由比较简单的函数通过这种方式所构成的较复杂的函数称之为复合函

数,这样的例子在应用中常常出现.

定义 3 设函数 $y=f(u)$,定义域为 U,$u=\varphi(x)$,定义域为 D,其值域为 D_φ,且 $D_\varphi \cap U \neq \emptyset$. 若对于 D 的某子集中的任意一个 x,有 $y=f[\varphi(x)]$ 与之对应,称函数 $f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.其中 u 叫做中间变量.

实际上,函数的复合可以这样理解:输入 x,经过第一个机器加工,输出 $u=\varphi(x)$,再把 u 值输入第二个机器,最后输出 y 值(如图 2-15 所示).

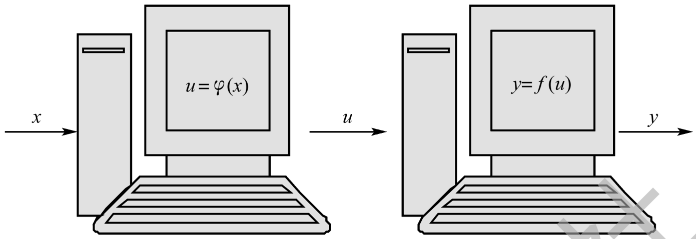

图 2-15

复合函数的定义域就是那些使得表达式 $f[\varphi(x)]$ 有意义的 x 的集合.

例如,由 $y=e^u$,$u=\sin x$ 复合而成的复合函数是 $y=e^{\sin x}$,它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 再如 $y=\sqrt{u}$,$u=1-x^2$ 复合而成的复合函数是 $y=\sqrt{1-x^2}$,它的定义域是 $[-1,1]$.

注:(1) 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数.

(2) 形成复合函数的函数可以是两个以上.如 $y=\ln u$,$u=\sin v$,$v=x^2$,经过两次复合构成函数 $y=\ln(\sin x^2)$.

(3) 利用复合函数的概念,可以把一个较复杂的函数拆分成几个简单的函数,一般要拆到每个简单函数都是基本初等函数,或由基本初等函数经过四则运算而成的函数.这种拆分的方法在计算导数和积分时很有用.

3.初等函数的概念

定义 4 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的并能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

经常遇到的函数大多都是初等函数,例如 $y=e^{-x^2}$,$y=\sin^2 x$,$y=\ln\cos x^4$ 等都是初等函数.

多项式函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 是用处相当广泛的初等函数. 它包括常值函数、线性函数、二次函数和三次函数等等.

有时也会遇到一些用分段函数表示的非初等函数.例如分段函数 $y=\begin{cases} x+1 & x\geqslant 0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$ 不是初等函数.

2.1.6 函数与数据拟合

现实生活中,经常可以得到一些数据(通过实际调查或者试验得到,有些是实际统计而得),为考察这些实际数据之间的关系,需要用某一已知的函数(与这些数据之间的关系比较接近)去拟合这些数据. 例如某一城市近十年来人口数如下表:

序号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
年限	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
人口(百万)	4	4.1	4.14	4.25	4.3	4.5	4.67	4.7	4.8	4.9

如何确定用哪一类函数拟合这些数据呢？一个简单直观的办法就是用年的序号作为横坐标，用人口数作为纵坐标，画出这些数据组成的图形（这样的图形称为**散点图**），观察散点图类似于什么函数，就用什么函数拟合，本例的散点图（如图 2-16 所示）类似于一条直线，就用线性函数 $y=ax+b$ 来拟合. 系数 a，b 如何确定呢？一个简单（但不是最好）的办法就是随便带入两点的数值，确定系数 a，b，这样做的结果一是带入不同的点，得到不同的线性函数，二是误差无法控制. 最理想的办法是确定一个线性函数，使得这些数据与该线性函数对应点的数据误差总和最小，这种方法称为**最小二乘法**，学完多元微积分后就可以在理论上理解这种方法了（有的称这种做法为曲线回归，若拟合的函数是线性函数，就称为线性回归）. 用一般的数学软件（如 Mathematica）指令就可简单地确定其系数. 本例拟合的结果是 $0.104606x+3.96527$，据此预测 2015 年该市的人口为 5.63897（百万人）. 具体做法见附录 A2.

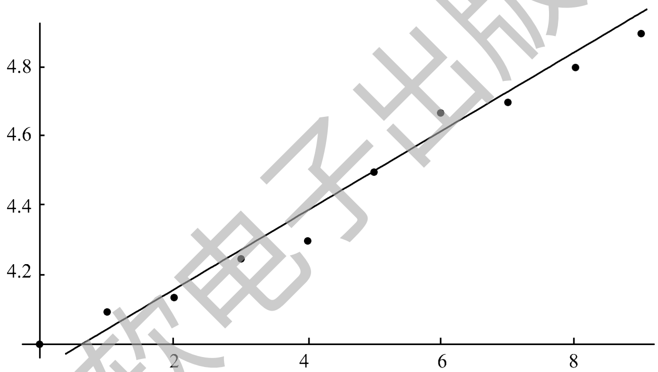

图 2-16

2.1.7* 几种经济学中的常用函数

1. 需求函数

市场对某种商品的需求数量受多种因素制约，如购买者的收入状况、商品质量的好坏等等. 当一个时期内个人收入、商品质量等因素保持恒定状态情况下，市场对某种商品的需求量 Q 主要依赖于商品的价格 P，于是 Q 是 P 的函数，经济学上称 Q 为**需求函数**，记作 $Q=f(P)$.

常见的需求函数有：

线性函数　$Q=b-aP$，

反比例函数　$Q=\dfrac{a}{P+c}-b$，

幂函数　$Q=a-bP^2$，

指数函数　$Q=Ae^{-bP}$，

其中 a，b，c，A 是正常数.

有时也称 $Q=f(P)$ 的反函数 $P=f^{-1}(Q)$ 为需求函数，因为它从另一侧面反映了价格与需

求量之间的关系.

2.供给函数

在一定时期内,卖方将某种商品投放市场的供给量 Q 受多种因素制约,如果忽略次要因素,商品的价格是主要因素,这样供给量 Q 就是价格 P 的函数,称 Q 为**供给函数**,记作 $Q= g(P)$.

常见的供给函数有:

线性函数 $Q=aP-b$,

幂函数 $Q=kP^a$,

指数函数 $Q=ae^{bP}$,

其中 a, b, k 为正常数.

3.总收益函数

设某种商品的价格为 P,销售量为 Q,则销售这些商品的总收益为 $R=QP$.

因为销售量即买方的需求量 $Q=f(P)$,其反函数为 $P=f^{-1}(Q)$,记作 $P=P(Q)$,于是总收益 R 可以是销售量 Q 的函数,即 $R=Q\cdot P(Q)$,也可以是价格 P 的函数,即 $R=f(P)\cdot P$.

4.总成本函数

生产一定数量的商品所需的全部资源投入(劳动力、原材料、设备等)的总费用 C 称为总成本,它是固定成本 C_1 与可变成本 C_2 的总和. 一般来说,固定成本 C_1 与商品量 Q 无关,而可变成本 C_2 与商品量 Q 有关,于是总成本 C 为

$$C=C_1+C_2(Q),$$

称为**总成本函数**.

5.总利润函数

总收益 R 、总成本 C 和总利润 L 之间的关系是

$$L=R-C.$$

【知识与能力拓展】

1.学习 Mathemacica 软件的基本界面知识.

2.学习 Mathemacica 环境下的自定义函数.

3.学习 Mathemacica 环境下的函数作图.

4.学习直方图、饼图、柱状图的画法.

5.上机演练:

(1) 已知函数 $f(x)=e^x+2x\tan x$,求 $f(3x)$.

(2) 做出函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 和 $f(x)=x\sin x$ 在 $[-2,2]$ 的图像.

6.函数概念的发展与形成

1637 年,笛卡尔创立了解析几何,为函数概念的产生奠定了基础. 17 世纪后期,莱布尼茨使用"function"(函数)一词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长等几何量;牛顿使用"流量"来表示变量间的对应关系. 莱布尼茨、牛顿等人虽然仅在几何直观上对函数进行了描绘,没有抽象出函数的一般概念,但却为此后函数概念的形成做出了重要的贡献.

18 世纪欧拉在伯努利所做工作的基础上，给出了较有代表性的函数定义：“一个变量的函数是由这个变量和一些数即常数以任何方式组成的解析表达式.”伯努利、欧拉对函数概念进行了明确定义，却仍然停留在代数观念上认识函数.

19 世纪，柯西首先从定义变量角度给出了函数定义，不久傅里叶发现某些函数也可用多个式子表示，接着狄利克莱又一次拓广了函数的概念，明确了函数的对应关系，指出对于区间上每一个 x 的值，y 都有一个确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数. 这就是函数的经典定义. 而后随着康托集合论的创立，维布伦用“集合”和“对应”的概念给出了近代函数的定义，通过集合的概念把函数的对应关系、定义域及值域进一步具体化和广义化，打破了“变量是数”的局限.

直到 20 世纪，函数概念才基本成形. 现代函数定义指出，若对集合 M 中的任一元素 x，总有集合 N 中确定的元素 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量.

7. 对数函数与地震波

地震震级 M 表示了在一次地震中所释放的能量多少，它与地震能量 E（单位为 10^{-7} J，J 为焦耳）有如下的关系式：$\lg E=11.8+1.5M$. 因此，地震能量以 $10^{1.5M}$ 的比例增加，每增加 1 个震级，地震能量将增加 32 倍；若增加 2 个震级，地震能量则增加 1000 倍. 由于地壳可以积蓄的应变能是有限的，因此，地震的震级不可能无限增加，迄今为止几乎没有超过 9 级的地震.

【学习效果评估】

(A)

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$　　(2) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$

(3) $y=\sqrt{\ln(x-2)}$　　(4) $y=\arcsin x+\tan x$

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$，求 $f(1)$，$f(x^2)$，$f(f(x))$，$(f(x))^{-1}$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f(3)$，$f(0)$，$f(-0.5)$.

4. 判断下列各组函数是否相同.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$　　(2) $f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$　　(4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}}$，$g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$

5. 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶的函数.

(1) $y=x^4-2x^2$　　(2) $y=\sin x-\cos x$

(3) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　(4) $y=3x^2+5x^5+1$

(5) $y=\dfrac{1}{x}\cdot\cos x$　　(6) $y=\sin x+\cos x$

(7) $y=-\log_2(1+x^2)$　　(8) $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$

6. 判断下列函数的有界性.

(1) $y=x^{\mu}$（μ 为非零有理数）

(2) $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）

(3) $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

(4) $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

(5) $y=A\sin(\omega x+\mu)$（A,ω,μ 为常数）

(6) $y=\tan x$

7. 试证下列函数在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

(1) $y=3x-6$　　(2) $y=2^{x-1}$　　(3) $y=\ln x+x$

8. 求下列函数的反函数.

(1) $y=ax+b$（$a\neq 0$）　　(2) $y=\sqrt[3]{x^2+4}$（$x>0$）

(3) $y=2\sin 3x$　$\left(0<x<\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(4) $y=\ln(x+4)$

9. 判断下列函数是由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=\cos^3(1-2x)$　　(2) $y=\ln(\arcsin\sqrt{x})$

(3) $y=\sin^3(x^2)$　　(4) $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$

10. 判断下列函数中哪些是初等函数.

(1) $y=2^{x+1}$　　(2) $y=\log_2 x$

(3) $y=x^2+\sin x$　　(4) $y=\begin{cases}4x & x>0\\ -4x+1 & x<0\end{cases}$

(5) $y=\sin 2x$　　(6) $y=\cos\sqrt{x}-\cos\sin 2x$

(B)

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，求函数 $f(e^x)$ 的定义域.

2. 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的函数，求函数 $f(x+1)$ 及 $f(x)+1$ 的定义域.

3. 已知函数 $f(x+5)=x^2+2x+1$，求 $f(x)$.

4. 已知函数 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

5. 已知 $f(x)$ 为奇函数，判断函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的奇偶性，其中

$$F(x)=f(x)\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ G(x)=f(x^2)\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

6. 下列函数中哪些是周期函数？对周期函数指出其周期.

(1) $y=\sin^2 x$　　(2) $y=\sin\dfrac{1}{x}$　　(3) $y=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x$

7. 设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-1,1)$ 内的奇函数，且函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增加，证明函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内也单调增加.

8. 验证函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数就是它本身.

9．判断下列函数中哪些是初等函数.

(1) $y=1+x+x^2+\cdots \quad (-1<x<1)$

(2) $y=|x|$

(3) $y=\begin{cases}0, & x\in Q\\ 1, & x\in I\end{cases}$　（Q 表示有理数，I 表示无理数）

(C)

1．某市电话局规定收费标准为：当月所打电话次数不超过 30 次时，只收月租费 25 元. 超过 30 次时，每次加收 0.20 元，请用函数表示收取的电话费 y 与用户当月所打电话次数 x 的关系.

2．把截面直径 $d=20\text{cm}$ 的圆形木料锯成矩形木料，设矩形的一条边长是 $x\text{cm}$，另一条边长 $y\text{cm}$，试用解析式写出 y 关于 x 的函数(如图 2-17 所示).

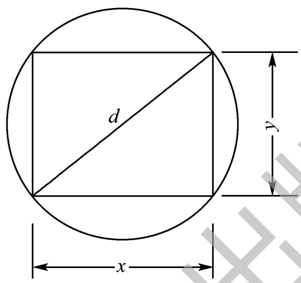

图 2-17

3．有一工厂 A 与铁路的垂直距离为 a 公里，它的垂足 B 到火车站 C 的铁路长为 b 公里，工厂的产品必须经火车站 C 才能转销外地.已知汽车运费是 m 元/吨公里，火车运费是 n 元/吨公里($m>n$). 为节省运费，想在铁路上修一转运站 M，试将运费表示为距离 $|BM|$ 的函数(如图 2-18 所示).

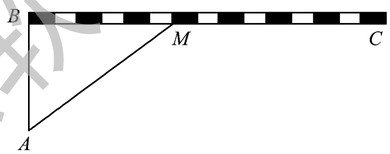

图 2-18

4．如图 2-19 所示，一个边长为 $a,b(a>b)$ 的长方形被平行于边的两条直线所分割，其中长方形的左上角是一个边长为 x 的正方形，试用解析式将图中的阴影部分的面积 S 表示成 x 的函数(如图 2-18 所示).

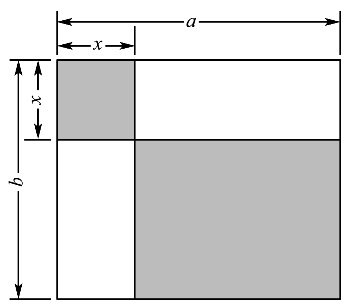

图 2-19

5．一种商品共 20 件，采用网上集体议价的方式销售. 规则是这样的：商品的单价随着订购量的增加而不断下降，直至底价. 每件商品的价格 x(元)与订购量 n(件)的关系是 $x=100+50/n$. 比如，在规定时间内只订购一件（$n=1$），单价就是 150 元；而如果 20 件商品都被订购($n=20$)，单价就只有 102.5 元了.

(1)请写出该商品的销售总金额 y(元)与销售件数 n 之间的函数关系；

(2)求购买 10 件时的销售总金额.

(提示:商品的销售总金额随销售件数的变化而变化,关系式为销售总金额=单价 * 销售量).

6. 已知生产某种商品的成本函数和收入函数分别为:

$$C=10-8Q+Q^2, R=4Q\text{(单位,万元)}$$

(1)求该商品的利润函数及销量为 6 台时的总利润;

(2)确定该商品销量为 7 台时是否赢利.

7. 某商店规定,某种商品一次性购买 20 kg 以下按零售价格 50 元/kg 销售;若一次性购买量满 20kg,可打 9 折;若一次性购买量满 40kg,可按 40 元/kg 的更优惠价格供货.

(1)试写出支付金额 y(元)与购买量 x(kg)之间的函数关系式;

(2)分别求出购买 15 kg 和 35 kg 应支付的金额.

8. 下表是某人患病后测量体温的部分值,其中 T 是时间 t(小时)的摄氏温度.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	37.5	39.5	39.8	41.1	39.7	39.5	37.5	35.3

(1)画出该病人体温变化的散点图.

(2)观察该病人体温变化的规律,猜测用什么样的函数描述这种规律比较切合实际.

(3)用数学软件拟和该函数.

(4)推测该病人得病 9 小时的体温.

9. 某学院上演一出戏剧.演出 x 天后获利 P(元),其相关数据在下表中给出.

天数 x	0	90	180	270	360	450
利润 P	−100	560	872	870	548	−100

(1)作表中数据的一个散点图.

(2)确定表中数据是否近似拟合一个二次函数.

(3)用数据点(0,−100),(180,872)和(360,548),求一个二次函数与表中数据拟合.

(4)用所拟和函数计算 225 天后的利润.

2.2 函数的极限

本节通过观察图形和列表给出表达函数变化趋势的量——极限的描述性定义.以此为基础讨论了无穷小和无穷大时的基本概念和性质.

【知识目标】

理解极限的概念,记忆极限的基本性质,理解无穷小和无穷大的基本概念和性质.

【能力目标】

能通过观察图像和列表，结合无穷小和无穷大的相关结论计算函数的极限.

【案例引入】

极限是微积分学的基础，微积分学中几乎所有基本概念（包括连续、导数、微分、积分等）都是建立在极限概念的基础之上. 事实上，微积分学创立之初，牛顿、莱布尼茨等人并没有给出极限的严格定义，直到 19 世纪由柯西、维尔斯特拉斯等人才给出极限的严格定义. 但这并没有拖慢微积分学的发展进程，即便没有严格极限定义，微积分学仍然在相当长一段时间内，在争议中迅速发展，为社会生产实践的各个领域做出了重要贡献.

引例 1（刘徽割圆术）　极限的思想可以追溯到古代. 早在我国魏晋时期，刘徽就提出了著名的“割圆术”，这是建立在直观基础上的一种原始的极限思想的应用. 在计算半径为 R 的圆的面积时，刘徽提出：“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”. 刘徽的思想可理解为用圆的内接正 n 边形的面积 S_n 来近似圆的面积 S（如图 2-20 所示），并不断增加正 n 边形的边数，利用一个不断变化的量（正 n 边形的面积 S_n）来计算一个常数（圆的面积 S）. 在这个过程中，随着正 n 边形边数 n 的增加，正 n 边形的面积 S_n 越来越接近圆的面积 S. 这个常量 S 在数学上称为是变量 S_n 当 n 无限增大时的极限. 也就是说，极限是某个不断变化的变量（正 n 边形的面积 S_n）的变化趋势（圆的面积 S）.

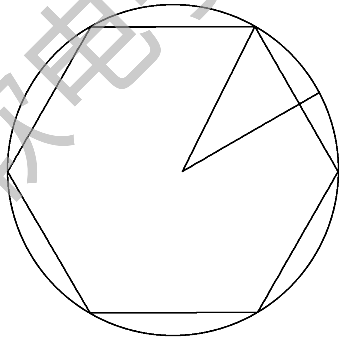

图 2-20

引例 2　考察函数 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x}$. 该函数在 $x=-1$ 处没有定义. 通过列表和图像来观察当 x 越来越接近于 -1 时，对应的函数值 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x}$ 的变化趋势.

列表：

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	…	-0.9999	-0.999	-0.99	-0.9
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	…	1.99999	1.999	1.99	1.9

作图(如图 2-21 所示):

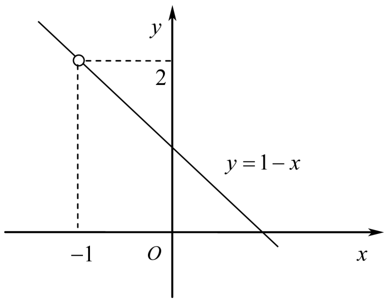

图 2-21

通过列表和图像可以看出,无论 x 从左侧还是右侧接近 -1 时,对应的函数值趋于一个固定的常数 2. 于是称常数 2 是函数 $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x}$ 当 x 趋于 -1 时的极限,记作

$$\lim_{x\to -1}f(x)=2.$$

引例 3 考察函数 $f(x)=\frac{1}{x}$,讨论当 $|x|$ 不断增大时,对应的函数值 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势.

列表:

x	10	100	1000	10000	100000	1000000	……
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	……
x	-10	-100	-1000	-10000	-100000	-1000000	……
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	-0.000001	……

作图(如图 2-22 所示):

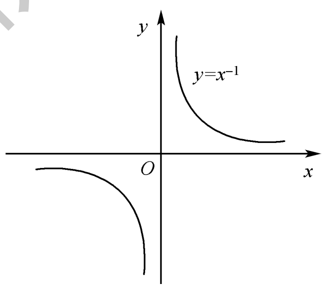

图 2-22

通过列表和图像可以看出,当 $|x|$ 无限增大(记为 $x\to\infty$),即 x 与原点距离无限增大时,对应的函数值都趋于一个固定的常数 0. 于是称常数 0 是函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 x 趋于无穷大时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

根据引例 1、引例 2、引例 3 中对函数极限的讨论，以下给出函数极限的描述性定义[1].

【知识正文】

2.2.1　自变量趋于有限值时函数的极限

定义 1　**设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义(可以在 x_0 处没有定义)，如果当 x 无限接近于 x_0(但 $x \neq x_0$)时，对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于某一固定的常数 A，则称当 x 趋近于 x_0 时，$f(x)$ 的极限是 A，记作**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A .$$

例如，对于常值函数 $f(x)=C$，通过列表和图像观察可知 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$；又如，对于正比例函数 $f(x)=x$，通过列表和图像观察可知 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

极限描述了函数的变化趋势，极限值和函数值是两个不同的概念. 比如引例 2 中，尽管函数 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x}$ 在 $x=-1$ 处无定义，但当 x 趋近于 -1 时，对应的函数值 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x}$ 无限趋近于 2，所以当 x 趋近于 -1 时该函数的极限值为 2. 也就是说，虽然函数 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x}$ 在 $x=-1$ 处无定义，但当 $x \to -1$ 时函数的极限值却是存在的.

需要注意的是，在 x 无限接近于 x_0 的过程中，既包括从 x_0 的左侧趋近于 x_0(此时 $x < x_0$)，也包括从 x_0 的右侧趋近于 x_0(此时 $x > x_0$). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 是指 x 不论以何种方式趋近于 x_0，函数 $f(x)$ 的变化趋势都是无限地接近 A. 但有些函数并不具有这样的性质. 比如函数 $f(x)=\begin{cases} x & x < 0 \\ 2 & x \geqslant 0 \end{cases}$，当 x 从左侧趋于 0 时，函数 $f(x)$ 趋于 0；当 x 从右侧趋于 0 时，函数 $f(x)$ 趋于 2(如图 2-23 所示). 当 $x \to 0$ 时这个函数的极限是不存在的. 为了说明这种情况，给出单侧极限的概念.

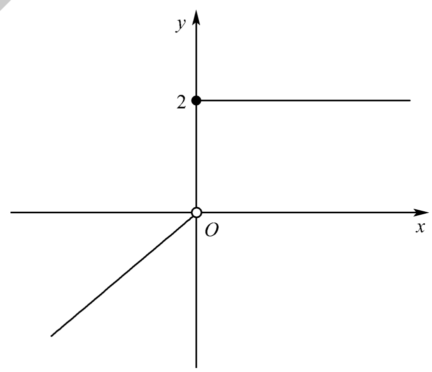

图 2-23

定义 2　**设函数 $f(x)$ 在 x_0 左侧附近有定义(可以在 x_0 处没有定义)，如果当 x 从 x_0 左侧无限接近于 x_0 时(记作 $x \to x_0^-$)，对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于某一固定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$ 时的左极限. 记作**

$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A .$$

定义 3　**设函数 $f(x)$ 在 x_0 右侧附近有定义(可以在 x_0 处没有定义)，如果当 x 从 x_0 右侧无限接近于 x_0 时(记作 $x \to x_0^+$)，对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于某一固定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时的右极限. 记作**

[1] 函数极限的严格定义见本节知识能力拓展部分.

$$f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\ .$$

左极限和右极限统称为**单侧极限**.

结合极限的定义,对于单侧极限有如下结论:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

例 1 已知函数 $f(x)$ 的图像如图 2-24 所示,通过图像讨论当 $x\to-2$, $x\to-1$, $x\to 0$, $x\to 3$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

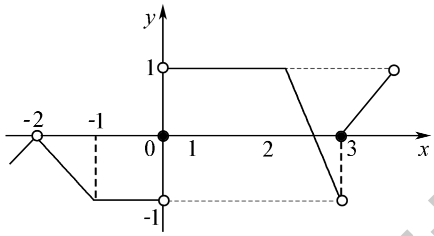

图 2-24

解 在 $x=-2$ 处 $f(x)$ 没有定义,但当 $x\to-2$ 时 $f(x)$ 的左右极限存在且均等于 0,所以 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=0$;

当 $x\to-1$ 时,由于 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-1$,所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$;

当 $x\to 0$ 时,由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$,而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在;

当 $x\to 3$ 时,由于 $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-1$,而 $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ 不存在.

2.2.2 自变量趋于无穷大时函数的极限

引例 2、引例 3 中分别给出的两个极限的区别在于一个是自变量趋于有限值时函数的极限,另一个是自变量趋于无穷大时函数的极限. 下面讨论自变量趋于无穷大时函数的极限.

定义 4 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义,当 $|x|$ 无限增大(记作 $x\to\infty$)时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一固定常数 A,则称当 $x\to\infty$ 时,$f(x)$ 的极限是 A,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\ .$$

定义 5 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内定义,当 $x>0$ 且 $|x|$ 无限增大(记作 $x\to+\infty$)时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一固定常数 A,则称当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 的极限是 A,记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

定义 6 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b)$ 内定义,当 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大(记作 $x\to-\infty$)时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一固定常数 A,则称当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)$ 的极限是 A,记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

根据以上定义,结合引例 3 的表格与图像,有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

注意到 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 2　计算极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$.

解　根据第 1 章中所给出的函数 $f(x)=\arctan x$ 的图像可知,

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2.2.3　函数极限的性质

1.唯一性

若 $\lim f(x)=A$ 且 $\lim f(x)=B$,则 $A=B$.

这里的 lim 可以是 $\lim\limits_{x\to\infty}$ 也可以是 $\lim\limits_{x\to x_0}$.

该性质说明,在自变量的同一变化过程中,若函数极限存在,则极限值唯一.

2.局部有界性

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在,则在 x_0 附近(不包含 x_0 点),$f(x)$ 有界.

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 存在,则一定存在 $X>0$,当 $|x|>X$ 时,$f(x)$ 有界.

3.局部保号性

以 $x\to x_0$ 为例.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或 $A<0$),则在 x_0 附近(不包含 x_0 点),$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

反之若 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

2.2.4　无穷小和无穷大

在日常的学习生活中,经常遇到"无穷小、无穷大"之类的表述,那么到底什么才是无穷小,什么才是无穷大?在微积分中应该怎样定义无穷小和无穷大呢?实际上,这个问题在历史上有许多著名学者做出过解释,比如牛顿曾认为"无穷小是比任何数的绝对值都要小的数",莱布尼茨曾认为"无穷小有时是零,有时却不是零",从现代数学的角度来看,这些解释都不尽如人意.直到极限的概念确立之后,人们才看清无穷小的本质.

早在我国春秋战国时期,《庄子·天下篇》中就提出了一个有关无穷小的命题:"一尺之棰,日取其半,万世不竭".其含义是:"一尺之棰",今天取其一半,明天取其一半的一半,如是"日取其半",总有一半留下,所以"万世不竭".一尺之棰是一有限的物体,但它却可以无限地分割下去,其剩余的长度是一个无穷小.这个辩论讲的是有限和无限的统一,有限之中有无限,其中正体现了"无穷小"的思想.下面对这一过程进行数学抽象:设棰之剩余长度为 y,天数为 x,则依据此话的含义,y 与 x 应具有函数关系 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,以极限的角度来看,当 $x\to+\infty$ 时此函数的极限为零.因此,可以从极限的角度来理解无穷小,认为无穷小是一个以零为极限的函数.

1.无穷小

定义 7　**如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零,则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小.**

因为 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以函数 $f(x)=x$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

应特别注意，不要把无穷小与很小的数混为一谈. 因为无穷小是在自变量的某一变化过程中，以零为极限的变量，而不是绝对值很小的数. 0 似乎是可作为无穷小的唯一一个数，因为它的极限是零，但 0 作为无穷小量时，指的是函数值为 0 的常值函数.

关于无穷小有如下定理[1].

定理 1　对于函数 $f(x)$，$\lim f(x)=A$（A 为常数）的充要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是无穷小.

定理 2　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

定理 3　有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

由定理 3 得，因为 $x^n=x\cdot x\cdot\cdots\cdot x$（$n$ 个 x 相乘），且 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以 x^n 是当 $x\to 0$ 时的无穷小；又因为 $\dfrac{1}{x^n}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以 $\dfrac{1}{x^n}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

定理 4　有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

下面用具体的例子说明定理 4 的应用.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数. 而当 $x\to 0$ 时，x 为无穷小，故当 $x\to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，即 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

常数可以看作有界函数的特例，所以有如下的推论：

推论　常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

2. 无穷大

例 4　通过列表和图像讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

解　列表：

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	…	0.001	0.01	0.1	1
$f(x)$	-1	-10	-100	-1000	…	1000	100	10	1

作图如图 2-22 所示.

通过列表和作图可以看出，当 $x\to 0$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 无限增大，此时称 $\dfrac{1}{x}$ 为 $x\to 0$ 时的无穷大.

定义 8　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，对应的函数值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大，记作

[1] 定理 1 至定理 4 的证明需要使用极限的严格定义，因此本书不给出证明. 证明过程请参考其它教材.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\ (\text{或}\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\ ).$$

在例 4 中，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷大，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

如果将定义 8 中的 $|f(x)|$ 无限增大换成 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$ ）时的**正无穷大**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty\ (\text{或}\ \lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty\ );$$

如果将定义 8 中的 $|f(x)|$ 无限增大换成 $f(x)<0$ 且 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$ ）时的**负无穷大**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty\ (\text{或}\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty\ ).$$

在例 4 中有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

需要注意的是，若 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时函数极限为无穷大，并不意味着该函数的极限存在，只能说明当 x 趋近于 x_0 时，函数值的绝对值在不断增大. 无穷大（ ∞ ）仅仅表示一个趋势，不能与很大的数（如一千万，一亿等）混为一谈.

由前面的例子注意到：函数 $f(x)=x$ 为 $x\to 0$ 的无穷小，而其倒数 $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$ 为 $x\to 0$ 的无穷大. 事实上，无穷大与无穷小之间有如下关系：

定理 5　在自变量的同一变化过程中，若函数 $f(x)$ 为无穷大，则函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若函数 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

例如，由对数函数 $f(x)=\ln x$ 的图像可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$.

【知识与能力拓展】

1. 深入学习用 Mathematica 软件求极限的各种指令，并了解默认参数项的具体含义.
2. 上机演练：利用 Mathematica 软件验证本节例题中涉及到的极限.
3. 函数极限的严格定义（ $\varepsilon-\delta$ 语言）是由维尔斯特拉斯给出的，定义如下：

定义 9　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$ **对** $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，**当** $0<|x-x_0|<\delta$ **时，恒有** $|f(x)-A|<\varepsilon$ **成立.**

该定义的几何意义：当 x 进入 x_0 的 δ 去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，函数 $f(x)$ 全部落在 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 之间（如图2-25所示）.

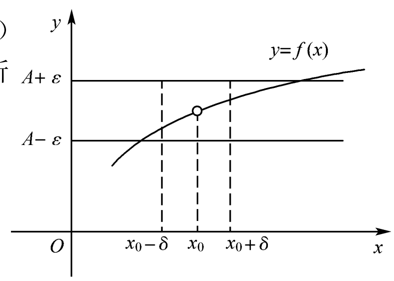

图 2-25

定义 10　$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

定义 11　$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$，存在正数 X，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

定义 9、定义 10、定义 11 借助不等式，通过 ε 和 δ 之间的关系，定量地、具体地描述了两个"无限过程"之间的联系. 因此，这样的定义是严格的，至今仍在数学分析书中使用.

4．无穷小量与极限概念的确立

牛顿之前，已经有许多数学家运用无穷小量进行研究. 法国数学家运用无穷小量得出了令人惊奇的正确结论. 可是无穷小量是什么？没有人解释得清楚.

费马

(1) 神奇的费马证明. 从古希腊到文艺复兴，大家都认为，周长一定的矩形以正方形围成的面积最大. 这是一个完全正确的命题. 但是，没有人能够证明它. 费马(Fermat，Pierrede，1601～1665)运用无穷小量加以论证. 什么是无穷小量，当时人们的认识是，它是任意小却不等于 0 的量. 也就是"既是 0 又不是 0 的量". 且看费马论证的过程.

证明：如果矩形的半周长为 A，且两边为 $A - B$ 和 B 时面积最大，要证明它是正方形，只需证明 $A = 2B$ 即可. 任取无穷小量 E，那么可以猜想(一个天才的想法)

$$B(A - B) = (B + E)[A - (B + E)].$$

费马认为，在变量取得最大值或最小值的地方，运动都是稳定的. 自变量加一个无穷小 E 进去，不会变化. 这就好像我们在二楼，看见一楼的人向上丢一只皮球，当球在最高点时，好像一刹那是不动的，很稳定. 于是，这样一个明明不等的式子，因为 E 是无穷小量，就似乎是合理的. 下面的证明更精彩.

于是右端展开，得

$$B(A - B) = BA - B^2 + AE - 2BE - E^2.$$

整理得

$$(A - 2B)E - E^2 = 0.$$

因为 $E \neq 0$，约去 E，得

$$(A - 2B) - E = 0.$$

又因为 E 无限小，可以略去，得到结论 $A = 2B$. 证毕.

这段论证，在逻辑上确实是不可接受的. 一会说无穷小量 E 不是 0，一会儿又说 E 可以略去即等于 0，前后矛盾.

(2)贝克莱主教的批评. 和费马同时代的数学家都普遍地使用无穷小量分析. 在牛顿正式创立微积分的许多论述中，也大量使用这种无穷小量的方法，例如，在瞬时速度概念中，究竟 Δt 是否等于零？如果是零，怎么用它去作除法呢？如果不是零，又怎么能把包含着它的那些项去掉呢？后人不断地批评这种演算. 最严厉的批判来自英国的贝克莱(Berkeley，1685～1753)大主教. 1734 年，贝克莱以"渺小的哲学家"之名出版了一本标题很长的书《分析学家：或一篇致一位不信神数学家的论文，其中审查一下近代分析学的对象、原则及论断是不是比宗教的神秘、信

仰的要点有更清晰的表达，或更明显的推理》. 在这本书中，贝克莱对牛顿的理论进行了攻击，他嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”. 马克思在他的《数学手稿》中也说，把无穷小量像 0 一样略去，是“暴力镇压”. 数学史上把贝克莱德问题称之为“贝克莱悖论”. 笼统地说，贝克莱悖论可以表述为“无穷小量究竟是否为 0”的问题：就无穷小量在当时实际应用而言，它必须既是 0，又不是 0. 但从形式逻辑而言，这无疑是一个矛盾. 这一问题的提出在当时的数学界引起了一定的混乱，由此导致了第二次数学危机的产生.

柯西

(3)极限概念的确立. 无穷小量引起的矛盾，在于把它看成一个静止的量. 在今天看来，无穷小量是一个变化过程，它的归宿是 0，即一个极限为 0 的变量. 作为变量，在变化过程中并不是 0，只是和 0 无限接近. 这个问题能够得以解决归功于严格极限理论的确立.

19 世纪，法国数学家柯西在罗宾斯、达朗贝尔、罗依里埃、波尔查诺等人所做工作的基础上，比较完整地阐述了极限概念及其理论，他指出：“当一个变量逐次所取的值无限趋于一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小就多小，这个定值就叫做所有其他值的极限值. 特别地，当一个变量的数值(绝对值)无限地减小使之收敛到极限 0，就说这个变量成为无穷小.”

柯西把无穷小视为以 0 为极限的变量，这就澄清了无穷小“似零非零”的模糊认识. 这就是说，在变化过程中，它的值可以是非零，但它变化的趋向是“零”，可以无限地接近于零.

柯西试图消除极限概念中的几何直观，作出极限的抽象定义. 但柯西的叙述中还存在描述性的词语，如“无限趋近”、“要多小就多小”等，因此还保留着几何和物理的直观痕迹，没有达到彻底严密化的程度.

为了消除极限概念中的直观痕迹，维尔斯特拉斯提出了极限的静态的定义(见定义 9)，给微积分提供了严格的理论基础.

——摘自整理《情真意切话数学》、《数学文化赏析》

【学习效果评估】

(A)

1. 函数 $f(x)$ 的图像如图 2-26 所示，根据图像求下列极限值或函数值，若不存在，说明理由.

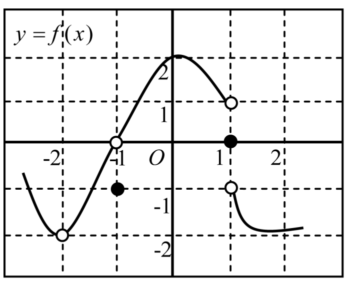

图 2-26

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$　　(4) $f(0)$

(5) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$　　(6) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

(7) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$　　(8) $f(-2)$

(9) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$　　(10) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

(11) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$　　(12) $f(-1)$

(13) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$　　(14) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

(15) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$　　(16) $f(1)$

2. 函数 $f(x)$ 的图像如图 2-27 所示,根据图像求下列极限值,若不存在,说明理由.

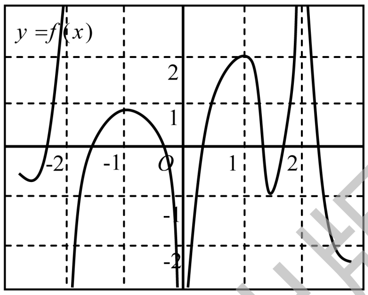

图 2-27

(1) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

(7) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$　　(8) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

(9) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

3. 下列函数在什么情况下是无穷小? 在什么情况下是无穷大?

(1) x^3 (2) x^6　(3) $\dfrac{1}{x}$　(4) $\dfrac{1}{x^2}$　(5) $\dfrac{1}{2}x$

4. 利用无穷小的性质计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos(\cot x)$

(3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\cos x^2}{x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\arctan x}{x^3}$

(B)

1. 下列函数在什么情况下是无穷小? 在什么情况下是无穷大?

(1) $-3x^5$　(2) $x(x-1)$　(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　(4) e^x

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0} 3x^4 f(x)$,其中 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

(C)

1. 一位病人每四小时需要注射 150 毫克的抗生素. 图 2-28 显示抗生素在病人血液中的浓度 $f(t)$ 与时间 t 的函数关系. 请计算极限 $\lim\limits_{t\to 12^+} f(t)$ 与 $\lim\limits_{t\to 12^-} f(t)$，并说明它们的含义.

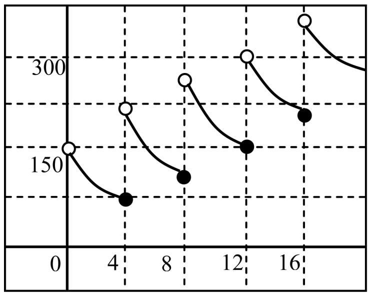

图 2-28

2.3　极限运算法则

本节介绍函数极限的运算法则以及极限的几种基本计算方法.

【知识目标】

理解函数极限的四则运算法则和复合函数的极限法则.

【能力目标】

运用极限运算法则计算几种基本类型的极限.

【案例引入】

在 2.2 节介绍了利用列表和作图来观察函数极限的方法. 这种方法对于计算一些较为复杂函数的极限是有局限性的. 那么，是否有更好的方法来计算较为复杂的函数的极限呢？

引例　观察下列函数的图像(如图 2-29 所示)，讨论它们当 $x\to 0$ 时的极限.

$$f(x)=\frac{1}{2}x-1,\ g(x)=-\frac{1}{4}x+1,$$

$$h_1(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{4}x,\ h_2(x)=f(x)-g(x)=\frac{3}{4}x-2,$$

$$h_3(x)=f(x)\cdot g(x)=-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x-1,\ h_4(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{4}{4-x}-2.$$

从 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像中可以观察到 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$；从 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 的图像中可以观察到 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=0$，$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=-2$，此时恰有 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to 0}g(x)$；从 $h_3(x)$ 和 $h_4(x)$ 的图像中可以观察到

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)g(x) = -1$，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$，此时恰有 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 0} g(x)$，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} f(x)}{\lim\limits_{x \to 0} g(x)}$.

于是推测，对于本例中所给出的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，其极限的运算具有如下性质：$f(x)$ 和 $g(x)$ 和、差、积、商的极限等于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 极限的和、差、积、商. 那么除了 $f(x)$ 和 $g(x)$，这个性质对于其它函数是成立的吗？如果成立，成立的条件是什么？

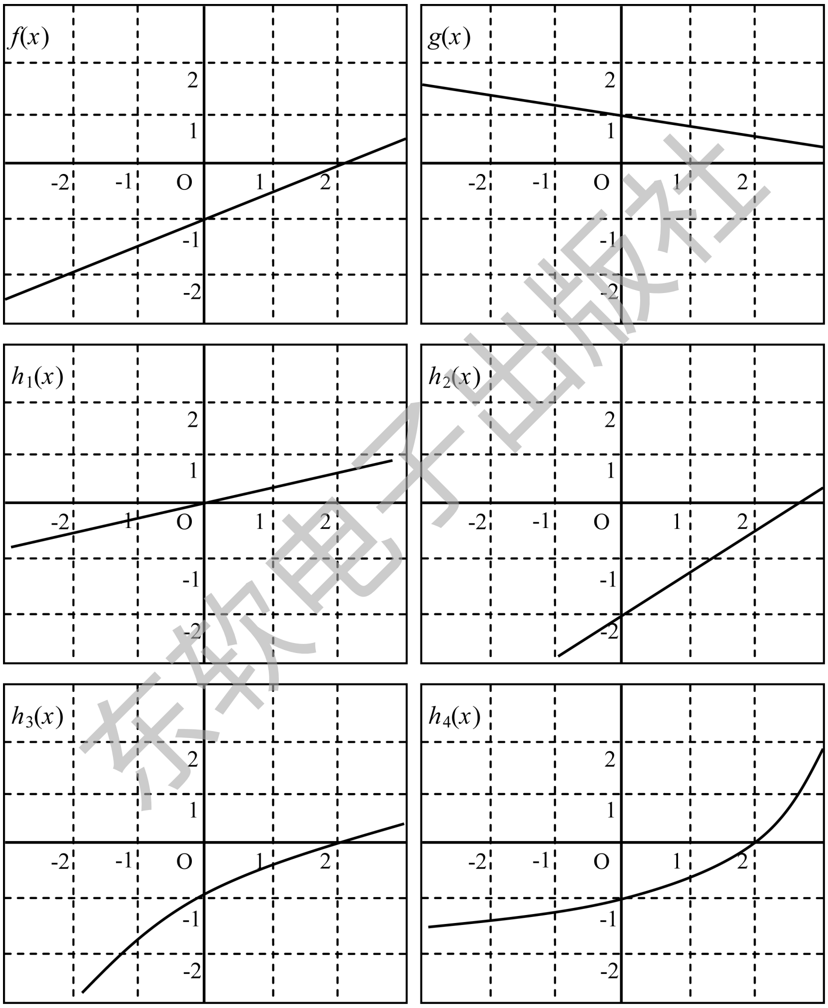

图 2-29

【知识正文】

2.3.1　函数极限的四则运算法则

利用无穷小的性质以及函数极限的性质，可以证明函数极限有如下的四则运算法则：

若 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，则

（1）和的极限等于极限的和：

$$\lim\left[f(x)+g(x)\right]=\lim f(x)+\lim g(x).$$

（2）差的极限等于极限的差：

$$\lim\left[f(x)-g(x)\right]=\lim f(x)-\lim g(x).$$

（3）积的极限等于极限的积：

$$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x).$$

显然，若 $f(x)=C$（C 为常数），则有 $\lim Cg(x)=C\lim g(x)$，这说明常数可以提到极限号外面.

（4）商的极限等于极限的商：

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\ (\text{其中 } \lim g(x)\neq 0\ ).$$

例 1　计算极限 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x+3)$.

解　根据函数极限的四则运算法则，有

$$\lim_{x\to 2}(x^2-x+3)=\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=2\times 2-2+3=5.$$

一般地，对于多项式函数 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 2　计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-7}{4x^3-3x}$.

解　$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-7}{4x^3-3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5x-7)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x^3-3x)}=\frac{1^2+5\times 1-7}{4\times 1^3-3\times 1}=-1.$$

设有理分式函数 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是多项式函数，且 $Q(x_0)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

由以上讨论，若 $f(x)$ 是多项式或有理分式函数，且 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 事实上，这个结论对于 $f(x)$ 是基本初等函数的情况也是成立的. 通过观察基本初等函数的图像（见第 1 章的 1.2 节）得到如下结论：

对于基本初等函数 $f(x)$，当 $x\to x_0$（x_0 在 $f(x)$ 的定义域内）时 $f(x)$ 的极限值等于 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

如 $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}=\sqrt{9}=3$，$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^0=1$，$\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^2}\ln x=\ln\mathrm{e}^2=2$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.3.2 复合函数的极限法则

对于初等函数形成的复合函数,有复合函数的极限法则:

设 $y=f[g(x)]$ 是由初等函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成,且它在 x_0 的附近有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

由复合函数极限法则可知,如果 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 均为初等函数,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,则它们形成的复合函数的极限计算可以使用换元法. 比如,函数 $y=\sin(1-x^2)$ 可以看做由函数 $y=\sin u$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的,当 $x\to 1$ 时,易知 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)=0$, 且 $\lim\limits_{u\to 0}\sin u=0$, 故有

$$\lim_{x\to 1}\sin(1-x^2)\overset{令u=1-x^2}{=}\lim_{u\to 0}\sin u=0.$$

另外,由 2.1 节知,初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算形成的,故结合之前的讨论有如下结论:

设初等函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义(I 称为 $f(x)$ 的定义区间), $x_0\in I$. 则当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限值等于 $f(x)$ 在 x_0 点处的函数值 $f(x_0)$, 即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

例 3 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln\cos x}{\sin x-1}$.

解 由于 $f(x)=\dfrac{1+\ln\cos x}{\sin x-1}$ 是初等函数,且 $x=0$ 在其定义区间内,故由上述结论知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限值就等于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的函数值. 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln\cos x}{\sin x-1}=\dfrac{1+\ln\cos 0}{\sin 0-1}=-1$.

一般地,在计算极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时,如果 $f(x)$ 是初等函数,并且 x_0 在 $f(x)$ 的定义区间内,则可直接将 x_0 代入到 $f(x)$ 的表达式中计算 $f(x_0)$, $f(x_0)$ 就是所求的极限. 这种计算极限的方法称为**直接代入法**.

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

解 注意到 $x=3$ 不在函数 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 的定义区间内,所以不能使用直接代入法. 因分子及分母有公因子 $x-3$, 且 $x\to 3$ 时, $x\neq 3$, $x-3\neq 0$, 所以可以约去非零因子,再利用直接代入法计算:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

一般地,对于初等函数 $f(x)$, 计算极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时,若 x_0 不在 $f(x)$ 的定义域内,如果分子、分母有公因子,可考虑通过对函数的分子或分母进行分解因式,约掉非零因子,将其化为可利用直接代入法求解的极限. 这种方法称为**因式分解法**.

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$.

解　注意到 $x=0$ 不在函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ 的定义区间内，所以不能使用直接代入法. 通过分子或分母有理化的方法将原极限化为可利用直接代入法计算的极限：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

一般地，对于初等函数 $f(x)$，计算极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，若 x_0 不在 $f(x)$ 的定义域内且 $f(x)$ 中含有根式时，可考虑通过分子（分母）有理化来将其化为可利用直接代入法求解的极限. 这种方法称为**分子（分母）有理化法**.

例 6　计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x+2}{7x^3+5x-3}$.

解　当 $x\to\infty$ 时，函数的分子和分母都趋近于无穷大. 把分子和分母同时除以 x 的最高次幂 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x+2}{7x^3+5x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)}=\frac{3+0+0}{7+0-0}=\frac{3}{7}.$$

这种分子和分母同时除以 x 的最高次幂的方法称为**分离无穷量法**.

例 7　计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3-2x-2}$.

解　当 $x\to\infty$ 时，函数的分子和分母都趋近于无穷大，把分子和分母同时除以 x 的最高次幂 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3-2x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-2\dfrac{1}{x}-2\dfrac{1}{x^2}}=\frac{0+0+0}{1-2\times 0-2\times 0}=0.$$

例 8　计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+4x^3+2x}{9x^3-3x^2+4x}$.

解　当 $x\to\infty$ 时，函数的分子和分母都趋近于无穷大，把分子和分母同时除以 x 的最高次幂 x^5，得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+4x^3+2x}{9x^3-3x^2+4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4\dfrac{1}{x^2}+2\dfrac{1}{x^4}}{9\dfrac{1}{x^2}-3\dfrac{1}{x^3}+4\dfrac{1}{x^4}}$，注意到分子的极限为 1，分母的极限为 0，由 2.2 节无穷小与无穷大的关系知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+4x^3+2x}{9x^3-3x^2+4x}=\infty$.

例 6、例 7、例 8 是下列一般情形的特例，即当 m,n 为正整数且 $a_m\neq 0,b_n\neq 0$ 时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1 x+b_0}=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & m=n\\ \infty, & m>n\end{cases}.$$

【知识与能力拓展】

1. 学习用 Mathematica 软件求极限的指令.

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，请思考 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 会有哪些情况？

3. 斐波那契数列

斐波那契数列的发明者，是意大利数学家列昂纳多·斐波那契，他撰写了《珠算原理》一书，是第一个研究印度和阿拉伯数学理论的欧洲人. 斐波那契数列

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots\cdots$$

从第三项开始，每一项都等于前两项之和. 即

$$F_0=1, F_1=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

它的通项公式为：

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

该公式又称为比内公式，是用无理数表示有理数的一个范例. 有趣的是，这样一个各项为自然数的数列，通项公式居然是用无理数表示，并且它与黄金分割之间还有密切的联系，F_n 与 F_{n+1} 比值的极限正好是黄金分割数.

事实上，记 $x_n=\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$，则有

$$x_n=\frac{F_n}{F_n+F_{n-1}}=\frac{1}{1+\dfrac{F_{n-1}}{F_n}}=\frac{1}{1+x_{n-1}}, n=1,2,\cdots$$

由单调有界原理可以证明数列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是存在的[1].

依据极限运算法则，在 $x_n=\dfrac{1}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限，则得

$$x=\frac{1}{1+x}, \text{即 } x^2+x-1=0$$

其正根 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 正是黄金分割中的黄金分割数.

斐波那契数列反映了大自然的一个基本模式. 比如在蜜蜂的繁殖和生长过程中，雄蜂只有母亲，没有父亲. 因为蜂后产的卵，受精的孵化为雌蜂，即工蜂或蜂后，而未受精的孵化为雄蜂，人们在追溯雄蜂的祖先时，发现一只雄蜂的第 n 代祖先的数目刚好就是斐波那契数列的第 n 项

[1] 单调有界原理及存在性证明可参考其它同类教材.

F_n. 又如,钢琴的 13 个半音阶的排列完全与雄蜂的第 6 代祖先的排列情况类似,这说明音调也与斐波那契数列有关. 再比如,在一棵树的生长过程中,若第一年有一个分支,第二年有两个分支,通常第三年就有 3 个分支,第四年就有 5 个分支,第 5 年就有 8 个分支……,每年的分支数恰好符合斐波那契数列.

【学习效果评估】

(A)

1. 函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图像如图 2-30 所示,根据图像求下列极限,若极限不存在,说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)$　　(4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$　　(6) $\lim\limits_{x\to -2}x^3f(x)$

(7) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2+f(x)}$　　(8) $\lim\limits_{x\to -1}[f^2(x)-g^2(x)]^3$

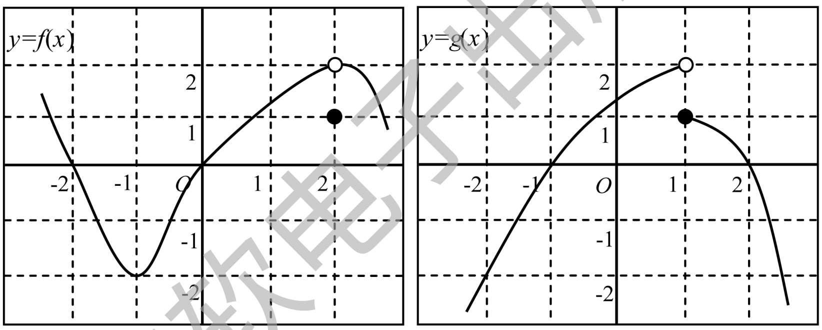

图 2-30

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan(1+x-x^2)}{\sqrt{\cos(x-1)+\ln(2-e^{2x-2})}}$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$　　(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$

(5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$

3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x+3x^2}{7-3x-2x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2}{2x^2+5x+4}$

(B)

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}+x}{x-1}$

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3x-2}}{x-1}$　　(6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x-1)^{50}}{(x+1)^{30}(3x-1)^{20}}$

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{4+x^2}-x\right)$　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$

2. 已知 $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & x\geqslant 1 \\ x+a, & x<1 \end{cases}$，若 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，求常数 a.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$ 存在，求常数 a 以及极限值.

(C)

1. 产品的价格与产品的成熟度相关联，消费者对新产品也有个认识过程，因此，产品的价格最初不能定得太高，假定产品的价格满足 $P(t)=20-10e^{-0.5t}$，请对该产品的长期价格作预测.

2. 100 个细菌放在培养器中，其中有足够的食物，但空间有限，对空间的竞争使得细菌的总数 N 与时间 t 的关系为 $N=\dfrac{1000}{1+9e^{-0.1158t}}$，问容器中最多能容纳多少细菌？

3. 一个 10Ω 的电阻器与一个电阻为 R_1 的可变电阻并联，电路的总电阻为 $R=\dfrac{10R_1}{10+R_1}$，当含有可变电阻 R_1 的这支路突然中断时，求电路的总电阻.

4. 推出一种新的电子游戏光盘时，在短期内销售量会迅速增加，然后下降，其函数关系为 $y=\dfrac{200t}{t^2+100}$，请你对该产品的长期销售量作出预测.

5. 相对论方程 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ 中，m_0 表示物体的静质量，c 表示光速(常量)，m 表示物体以速度 v 运动时的质量. 请计算 $\lim\limits_{v\to c^-}m$，并说明其含义.

6. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，称 $y=A$ 为函数 $f(x)$ 的水平渐近线. 求函数 $y=3-\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+10}$ 的图形的水平渐近线，并利用数学软件作图验证结果.

2.4 两个重要极限

本节介绍两个重要的极限以及利用这两个重要极限求极限的方法.

【知识目标】

记忆两个重要极限.

【能力目标】

掌握利用两个重要极限计算极限的方法.

【案例引入】

引例 1　在 2.2 节引例 1 中利用刘徽割圆术,根据初等几何知识可以求出 S_n 的表达式 $S_n=\frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$.

当 n 趋向于无穷大时,则可以得到圆的面积 $S=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. 如果令 $x=\frac{1}{n}$,则这个极限可化为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{R^2\sin2\pi x}{2x}$,这个极限可利用极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ 来进行计算.

下面通过列表和作图来讨论极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ 的结果.

列表:

x(弧度)	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
0.17453	0.17365	0.995
0.08727	0.08716	0.9987
0.034907	0.034899	0.9998
0.017453	0.017452	0.99996
0.0087266	0.0087265	0.99999
0	0	没有定义
−0.0087266	−0.0087265	0.99999
−0.017453	−0.017452	0.99996
−0.034907	−0.034899	0.9998
−0.08727	−0.08716	0.9987
−0.17453	−0.17365	0.995

作图(如图 2-31 所示):

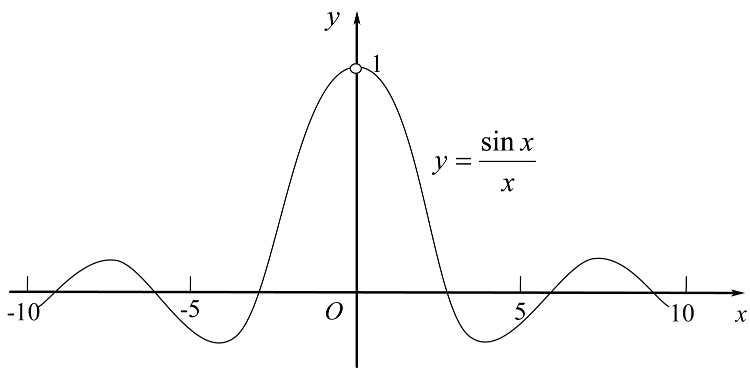

图 2-31

从表格和图像中可以清楚地看到当 x 从 0 的两侧越来越接近于 0 时(但没有到达 0 值),$\frac{\sin x}{x}$ 越来越接近于 1. 于是得到结论

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

引例 2 自然对数 e 在科技生产中广泛使用,以 e 为底数,许多式子都能得到简化. e 是"自然律"的精髓,在数学上它是函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 当 $x\to\infty$ 时的极限. 人们在研究一些实际问题,如物体的冷却、细胞的繁殖、放射性元素的衰变时,都会涉及到极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 以及自然对数 e. 正是这种从无限变化中获得的有限,充分体现了宇宙的形成、发展及衰亡中最本质的东西.

下面通过列表和图像来观察极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$:

列表:

x	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	2.71828	2.718281	…

作图(如图 2-32 所示):

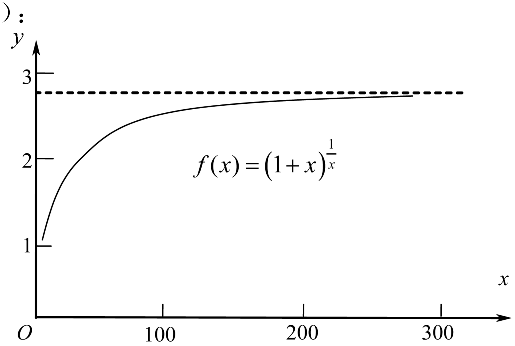

图 2-32

从上表格和图像中可以看出，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ 越来越接近于一个介于 2 与 3 之间的数，这个数就是自然对数 e，e＝2.71828…….

于是得到结论 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，同样的方法可得 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，所以有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

【知识正文】

2.4.1　利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求极限

利用已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 可以求得很多具有相似形式的极限. 在应用时，只要 sin 符号里的函数与分母的函数相同，且都趋近于 0，则总体极限为 1，为明了起见，可以将此极限改写为 $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$，其中 □ 表示任何趋于零的函数.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1.$$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解　令 $\arcsin x=t$，则 $x=\sin t$. 当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=1.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

2.4.2 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 求极限

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，利用变量代换不难证明 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$. 利用这两个极限可以求得很多具有相似形式的极限，也可以将此极限改写为 $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$，其中 $\square$ 表示任何趋于零的函数.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+(-x))^{\frac{1}{-x}}\right]^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

例 7 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^3=\mathrm{e}^3$.

例 8 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=2$，求常数 k.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k=\mathrm{e}^k=2$，所以 $k=\ln 2$.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{x-2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}[1+(x-2)]^{\frac{1}{x-2}}=\mathrm{e}$.

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$.

例 11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

解 设 $\mathrm{e}^x-1=t$，则 $x=\ln(1+t)$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1.$$

例 12 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

解 由于 $a^x=\mathrm{e}^{\ln a^x}=\mathrm{e}^{x\ln a}$，结合例 11 的结论，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a=\ln a.$$

例 13　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-x}{2-x}\right)^{x}$.

解　令 $\dfrac{3-x}{2-x}=1+u$，则 $x=2-\dfrac{1}{u}$. 当 $x\to\infty$ 时 $u\to 0$，于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-x}{2-x}\right)^{x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{2-\frac{1}{u}}=\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{-\frac{1}{u}}\cdot(1+u)^{2}\right]$$

$$=\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-1}\cdot\lim_{u\to 0}(1+u)^{2}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 14　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

解　利用公式 $\mathrm{e}^{\ln x}=x$ 得

$$(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\frac{6x}{\sin x}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}},$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sin x}=6$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}=\mathrm{e}$，根据复合函数的极限法则有

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{6x}{\sin x}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}=\mathrm{e}^{6\ln \mathrm{e}}=\mathrm{e}^{6}.$$

本例中，形如 $u(x)^{v(x)}$（$u(x)>0$，$u(x)$ 不为 1）的函数，通常称为**幂指函数**. 一般地，如果 $\lim u(x)=a>0$，$\lim v(x)=b$，则有

$$\lim u(x)^{v(x)}=a^{b}.$$

这里 lim 表示在同一自变量过程中的极限.

【知识与能力拓展】

1．上机演练：

(1)观察图像验证极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x+5}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\tan x}}$　　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x\sin x}-1}{x^{2}}$

2．自然对数之美

e＝2.71828……是“自然律”的一种量的表达. “自然律”的形象表达是螺线. 比如：一缕袅袅升上蓝天的炊烟，一朵碧湖中轻轻荡开的涟漪，决定遗传的物质——核酸结构也是螺旋状的. 人们在研究一些实际问题，如物体的冷却、细胞的繁殖、放射性元素的衰变时，都要研究自然对数 e. 螺线特别是对数螺线的美学意义可以用指数的形式来表达：

$$\varphi k\rho=\alpha \mathrm{e}$$

其中，α 和 k 为常数，φ 是极角，ρ 是极径. 为了讨论方便，我们把 e 或由 e 经过一定变换和复合的形式定义为“自然律”. 因此，“自然律”的核心是 e.

3．e 与碳-14 定年法

考古学上常用的鉴定年代的方法是 1948 年美国芝加哥大学的 Willard Libby 设计出来的

碳-14 定年法. 放射性碳-14 因空气中的氮原子受宇宙线轰击而形成,但它不稳定,会失掉两个中子,衰变成碳-12. 碳-14 不断产生又不断衰变,结果它在空气中的含量近似保持不变,就像一个水池,同时以同样的速度进水和出水,池内含水量不变. 活着的动植物通过呼吸,体内自然也含有碳-14. 一禽一兽、一草一木,每单位重量所含碳-14 总是相同的. 但是,一旦动物死亡,呼吸停止,不再从空气中吸入碳-14,而原来留在体内的碳-14 则继续衰变,经过 5730 年(半衰期),碳-14 的量剩下原来的一半;经过 11460 年,剩下原来的四分之一. 这里,经过的时间和剩余的质量之间的关系是 $M(t)=M_0\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}$,其中衰变常数 $\lambda\approx 1.2\times10^{-4}$. 如果测出考古发掘物(如兽骨、木炭、贝壳等)的碳-14 含量 $M(t)$,利用上述公式即可断定其存在的年代.

与上述碳-14 定年法类似,鉴定一幅画的真伪,也得和 e 打交道. 画的颜料中含有铅-210 和镭-226,利用两者的放射性,可以大致判别画的年代,从而让赝品“原形毕露”.

【学习效果评估】

(A)

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x}{\tan4x}$

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+5\cot x)^{\tan x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\cos x^{\frac{1}{1-\cos x}}$

(B)

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin3x}-1}{4x^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos3x}{x^2}$

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{x}\right)^x$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x+5}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}}$

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,求常数 a.

(C)

利用刘徽割圆术计算半径为 1 的圆的面积.

2.5　无穷小的比较

本节介绍无穷小的比较以及利用等价无穷小的替换计算极限的方法.

【知识目标】

理解高阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小的概念.

【能力目标】

运用等价无穷小的替换计算函数的极限.

【案例引入】

2.2 节中介绍了无穷小的概念和性质，了解到两个无穷小的和、差、积仍然是无穷小. 但是，两个无穷小的商却会出现不同情况.

引例　计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

计算的结果是：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2}=\infty,\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

从以上结果可以看出，两个无穷小的商有可能是无穷小，有可能是无穷大，还有可能是一个不为零的常数. 实质上这反映了不同的无穷小趋近于零的“快慢”程度. 就上面的几个例子而言，在 $x\to 0$ 的过程中，$x^2\to 0$ 比 $3x\to 0$“快些”，反过来 $3x\to 0$ 比 $x^2\to 0$“慢些”. 而 $\sin x\to 0$ 与 $x\to 0$“快慢相仿”，$\sin x\to 0$ 与 $x\to 0$“快慢相当”. 因此，可以通过计算无穷小的商的极限来比较不同的无穷小趋近于零的“快慢”程度.

【知识正文】

定义 1　**设 α 和 β 都是自变量某一变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq 0$.**

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$（$C$ 为常数），则称 β 与 α 是同阶无穷小；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0$（$C$ 为常数），则称 β 是 α 的 k 阶无穷小；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

显然等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形，即 $C=1$ 的情形.

下面举一些例子来说明无穷小的比较：

在引例中，当 $x\to 0$ 时，x^2 与 $3x$ 都是无穷小，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x}=0$，所以当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 $3x$ 高阶的无穷小，即 $x^2=o(3x)\ (x\to 0)$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x^2}=\infty$，所以当 $x\to 0$ 时，$3x$ 是比 x^2 低阶的无穷小.

在引例中，当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2 都是无穷小，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小.

在引例中，当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 都是无穷小，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小，即 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$.

例 1 当 $x\to 0$ 时，$x^2\sin x$ 与 $1-\cos x$ 都是无穷小，试比较它们的阶.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin\dfrac{x}{2}}\right)\cdot\cos\frac{x}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot 2x\cdot\cos\frac{x}{2}\right)=0,$$

所以当 $x\to 0$ 时，$x^2\sin x$ 是比 $1-\cos x$ 高阶的无穷小.

例 2 证明当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\dfrac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1}=1.$

所以当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$.

事实上，当 $x\to 0$ 时，对于正整数 n，有 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

关于等价无穷小，有如下重要的性质：

定理 1 **设** $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，**且** $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ **存在，则** $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证明 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

定理 1 表明，求两个无穷小之比的极限时，分子与分母都可用等价无穷小来代替. 称这种方法为**等价无穷小替换法**. 如果用来代替的无穷小选得适当，可以简化计算. 如上面的例 1，因为 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot x}{\dfrac{1}{2}x^2}=0.$

下面给出几种利用等价无穷小求极限时，经常用到的一些等价无穷小.

(1) $(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim \dfrac{1}{n}x\ (x\to 0)$;

(2) $\sin x\sim x\ (x\to 0)$;

(3) $\tan x\sim x\ (x\to 0)$;

(4) $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$;

(5) $e^x-1\sim x\ (x\to 0)$;

(6) $\arcsin x\sim x\ (x\to 0)$;

(7) $\arctan x\sim x(x\to 0)$;

(8) $1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解　因为当 $x\to 0$ 时，$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim \dfrac{1}{3}x^2$，$\cos x-1\sim -\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)\cdot \arcsin 3x}{\tan 5x\cdot (e^x-1)^2}$.

解　当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$\arcsin 3x\sim 3x$，$\tan 5x\sim 5x$，$e^x-1\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)\cdot \arcsin 3x}{\tan 5x\cdot (e^x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 3x}{5x\cdot x^2}=\frac{3}{5}.$$

【知识与能力拓展】

1. 在 Mathematica(版本 5.2)中计算极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

2. 在 Mathematica(版本 7.0 及 7.0 以上)中计算极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

3. 以上两题的结果是否一致？如果不一致，哪一个是正确的？请说明原因.

【学习效果评估】

(A)

1. 当 $x\to 0$ 时，下列函数哪些是比 x 高阶的无穷小？哪些是比 x 低阶的无穷小？哪些是 x 的同阶无穷小？哪些是 x 的等价无穷小？

(1) $3x^2$　(2) $\sqrt{2x}$　(3) e^x-1　(4) $\ln(1-x)$

(5) $\sqrt[3]{\sin x^3}$　(6) $\cos x-1$　(7) $\arcsin x$　(8) $\dfrac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x}$

2. 利用等价无穷小计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 6x}$　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin (x-1)^2}{x^2-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x(e^{2x}-1)}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\ln(1+x^2)}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\arcsin x}{\arctan x}$

(B)

1. 利用等价无穷小计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

2. 利用和差化积公式计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

3. 设 α,β 是无穷小,证明:

(1)若 $\alpha\sim\beta$, 则 $\beta-\alpha=o(\alpha)$;

(2)若 $\beta-\alpha=o(\alpha)$, 则 $\alpha\sim\beta$.

(C)

1. 已知物体的运动方程为 $s(t)=2-e^{-t}$, 试求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$, 并对此极限给出物理解释.

2.6　函数的连续性与间断点

本节介绍函数的重要特性——连续性的概念和间断点的类型.

【知识目标】

理解函数连续性的概念和间断点的类型,记忆初等函数的连续性.

【能力目标】

运用函数的连续性分析实际问题涉及到的函数的性质.

【案例引入】

在 2.2 节函数的极限中介绍了初等函数在定义区间内的极限,其极限值等于函数值. 函数的这一特性称为函数的连续性. 直观上,所谓函数连续就是函数的图像是一条不间断的曲线. 下面通过一个例子来说明连续的概念:

引例　如图 2-33 所示,(a),(b),(c)三幅图像表示三个不同函数. 讨论它们在 $x=0$ 处的特性.

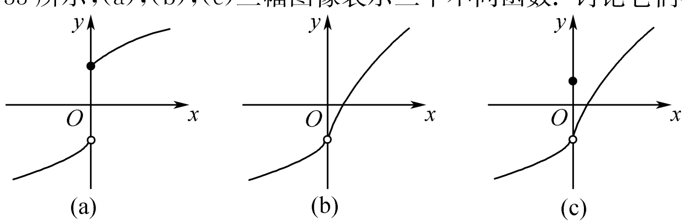

图 2-33

三幅图像的共同点是函数图像都在 $x=0$ 处发生了间断，也就是说，这些函数在 $x=0$ 处是不连续的. 不同点是函数的图像发生间断的情况有所不同. 图(a)中，当 $x\to 0$ 时函数左右极限是存在的，但不相等，所以函数在点 x_0 处连续的第一个条件是函数在该点处的左右极限存在且相等(即函数在该点处的极限存在)；图(b)中，虽然当 $x\to 0$ 时函数极限存在，但没有定义，所以函数在点 x_0 处连续的第二个条件是函数在该点处要有定义；图(c)中，虽然当 $x\to 0$ 时函数极限存在，且有定义，但极限值不等于函数值，所以函数在点 x_0 处连续的第三个条件是当 $x\to x_0$ 时函数极限值要等于函数值. 如果满足以上三个条件，才能使函数是连续的.

【知识正文】

2.6.1　函数的连续性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近(包括 x_0 点)有定义. 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

这个定义满足了引例中提出的三个条件：

(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；

(2)当 $x\to x_0$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果三条中任何一条不满足，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续.

对于定义 1，可做如下变形：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$，记 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$，分别称为变量 x 和变量 y 的增量(增量可正可负)，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. 因此有

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 附近(包括 x_0 点)有定义，如果自变量的增量 Δx 趋于零时，相应的函数的增量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

例 1　讨论函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 附近有定义，由于

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases},$$

注意到 $f(x)$ 在 $x=0$ 左右两侧表达式不一致，因此考虑使用左右极限.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. 而 $f(0)=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$，即 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续.

例 2　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ -x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 类似于例 1,需要讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右极限.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2=0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-x+1)=1.$$

由于左右极限存在但不相等,因此 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在,这就证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续(如图 2-34 所示).

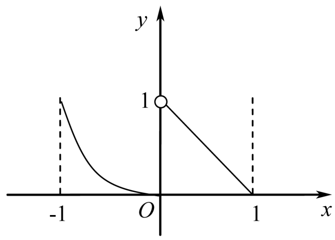

图 2-34

在例 2 中,虽然函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,但其左极限等于函数值,此时称 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是**左连续**的. 下面给出左连续的定义.

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 左侧附近(包括 x_0 点)有定义,且

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

类似还有右连续的定义:

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右侧附近(包括 x_0 点)有定义,且

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

由左右极限与极限的关系知,如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续;反之,如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续,则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处必连续.

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点处都连续,则称**函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续**,或者称 **$f(x)$ 是开区间 (a,b) 内的连续函数.**

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,在左端点 $x=a$ 处右连续,在右端点 $x=b$ 处左连续,则称**函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续**,或者说 **$f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数.**

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 的图形在闭区间 $[a,b]$ 上是一条连续不间断的曲线.

例如,函数 $y=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上连续,其图像是 $[-1,1]$ 上的一条连续不间断的抛物线;而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内连续,在闭区间 $[0,1]$ 上不连续,因为它在 $x_0=0$ 处无定义,故不是右连续的.

2.6.2　初等函数的连续性

通过对函数的作图和列表可以归纳出：**一切基本初等函数在其定义域内都是连续的**[1].

由函数在某点连续的定义和极限四则运算法则，可以得出结论：**连续函数的和、差、积、商(如果存在的话)仍然是连续函数.**

另外，设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，若 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，$y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续($u_0=g(x_0)$)，则 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处连续. 即**连续函数的复合函数仍为连续函数.**

事实上，**一切初等函数在其定义区间内都是连续的.** 也就是说，设 $y=f(x)$ 为初等函数，若 x_0 在该函数的定义区间内，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，确定常数 a 的值，使 $f(x)$ 连续.

解　由初等函数的连续性，当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 连续. 故只需确定常数 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由于 $f(0)=a$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=2$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有 $f(0)=a=2$.

2.6.3　函数的间断点

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**间断**. 称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**不连续点**或**间断点**.

下面通过几个例子来介绍间断点的分类.

例 4　讨论分段函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　虽然函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义 $f(0)=0$，但在 $x=0$ 处的左、右极限分别为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,$$

也就是说 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，因此 $x=0$ 是函数的间断点. 这时曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处产生跳跃现象(如图 2-35 所示). 称 $x=0$ 这样左、右极限存在但不相等的间断点为**函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.**

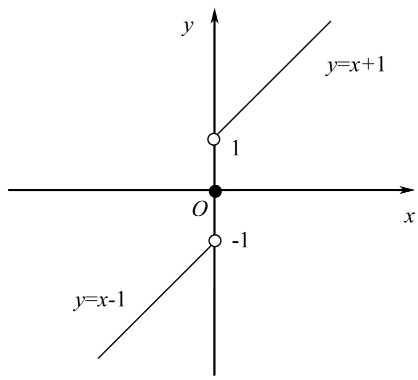

图 2-35

[1] 基本初等函数连续性的严格证明请参考其它教材.

例 5 讨论函数 $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

解 由于函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义,所以函数在 $x=1$ 处不连续.但 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$.

如果补充定义 $y|_{x=1}=f(1)=2$,则该函数就成为连续函数了,称 $x=1$ 这样左、右极限存在且相等(即极限存在)的间断点为**函数 $f(x)$ 的可去间断点**(如图 2-36 所示).

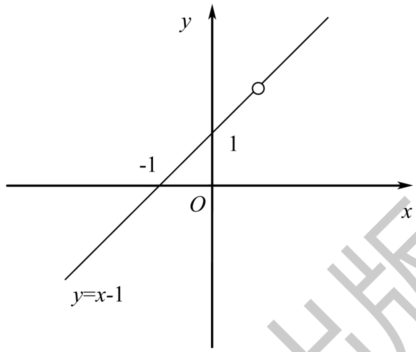

图 2-36

例 6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,但 $f(0)=2$. 故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.如果将 $f(0)=2$ 改为 $f(0)=1$,则该函数成为连续函数.与例 5 相同,$x=0$ 也是函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例 7 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义,所以 $x=0$ 是函数的间断点.而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$,称 $x=0$ 这样极限为无穷大的间断点为**函数 $f(x)$ 的无穷间断点**(如图 2-37 所示).

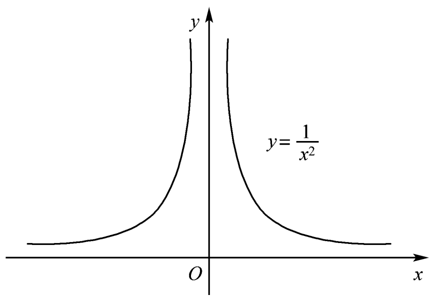

图 2-37

例 8　讨论函数 $y=f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，所以 $x=0$ 是此函数的间断点. 该函数的图形在 -1 与 1 之间振荡，称 $x=0$ 这样的间断点为**函数 $f(x)$ 的振荡间断点**（如图 2-38 所示）.

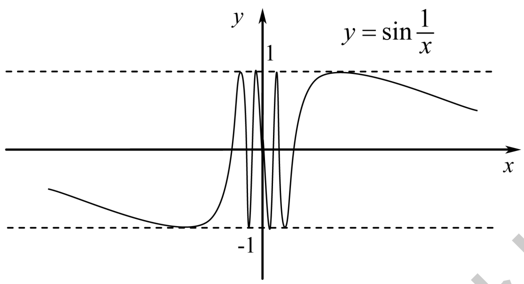

图 2-38

由此可见，函数的间断点有多种类型，但总的说来，函数的间断点可分为两类. 设点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，如果该函数在点 x_0 处的左、右极限都存在，则称点 x_0 为**第一类间断点**，第一类间断点包括**可去间断点**和**跳跃间断点**，可去间断点是左、右极限存在且相等（即极限存在）的间断点，跳跃间断点为左、右极限存在但不相等的间断点；把不是第一类间断点的其它间断点都叫做**第二类间断点**. 无穷间断点和振荡间断点属于第二类间断点.

【知识与能力拓展】

1. 上机演练：画出下列函数图像，并判断是否连续，观察间断点.

（1）$y=\dfrac{1}{x-1}$　　（2）$y=\sin\dfrac{1}{x}$　　（3）$y=\begin{cases}x-1, & x<0\\ \sqrt{1-x^2}, & x\geqslant 0\end{cases}$

2. 狄利克莱函数

函数的第二类间断点除了无穷间断点和振荡间断点外，还有其它类型的第二类间断点. 比如狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^C\end{cases}\text{（其中 } Q \text{ 表示有理数）},$$

其定义域为全体实数. 在定义域内每一点，都不连续（即处处不连续）. 定义域内每一点既不是无穷间断点，也不是振荡间断点，而是其它类型的第二类间断点.

除此之外，函数 $D(x)$ 为偶函数，以任意有理数为周期. 这些独特的性质使狄利克莱函数成为数学分析中一个非常重要的函数，可以利用这个函数给出一些假命题的反例，或构造出一些性质奇特的函数.

【学习效果评估】

（A）

1. 指出下列函数的间断点，并说明间断点的类型，如果是可去间断点，则补充或改变函

数的定义使它连续.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 1\\ 3-x & x>1\end{cases}$

(3) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$　　(4) $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x}$

2. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$.

3. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}1+\cos x, & x\leqslant 0\\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x}, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

(B)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 讨论

$$g(x)=\begin{cases}f(\dfrac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}a+x^2, & x<0\\ 1, & x=0\\ \ln(b+x+x^2), & x>0\end{cases}$$

已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，试确定 a 和 b 的值.

3. 已知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x+a, & x<0\\ b, & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}\quad (a,b\text{ 为常数})$$

在 $x=0$ 处连续，问 a 和 b 各等于多少?

4. 找出下列在定义域上连续的函数.

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{1-\cos x}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

5. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$ 在 $x=0$ 处间断点的类型.

6. 设 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，判断 a，b 的正负号.

(C)

1. 某停车场收费标准为：若停车时间不超过一个小时收取 3 元停车费；若停车时间超过一个小时按每小时 2 元收取停车费；每天至多收取 17 元停车费.

(1)设 t 表示停车时间，$f(t)$ 表示停车费用，写出 $f(t)$ 的表达式；

(2)画出 $f(t)$ 的图像；

(3)讨论 $f(t)$ 的连续性.

2. 查找相关文献，讨论下列函数的连续性：

(1)一年内某一地区的温度 T 关于时间 t 的函数 $T=f(t)$；

(2)一棵树的高度 h 关于生长时间 t 的函数 $h=f(t)$；

(3)乘坐出租车时，收取的车费 C 关于乘车里程 x 的函数 $C=f(x)$；

(4)房屋照明电路中的电流强度 I 关于照明时间的函数 $I=f(t)$.

2.7　闭区间上连续函数的性质

本节介绍闭区间上连续函数的最大值、最小值定理，有界性定理和介值定理

【知识目标】

记忆闭区间上连续函数的最大值、最小值定理、有界性定理和介值定理.

【能力目标】

运用介值定理和最大最小值定理.

【案例引入】

引例 1　设想有一条无限弹性的弦 AB，其两个端点固定，呈水平地放置在坐标系中(如图 2-39 所示). 若弦 AB 上面的两点 C，D 受到与 y 轴平行的两个力的作用，则产生形变，成为一条有高低起伏的曲线，但不论怎样用力都无法使弦 AB 崩断.

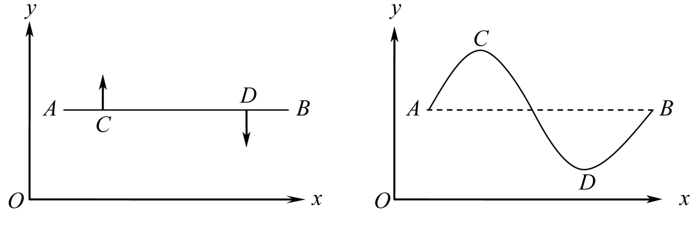

图 2-39

如果 C 点与 D 点的纵坐标分别是曲线所代表的函数的最大值与最小值，则这个现象可解释为不论闭区间上的连续函数是怎样的，其图像在闭区间上一定有最高点和最低点，即闭区间

上连续函数一定存在最大值和最小值.

引例 2 如图 2-40 所示,在 xOy 平面上,点 A,B 分别位于 x 轴的上下两侧,是否存在不穿过 x 轴而直接将 A,B 两点连结起来的连续曲线?

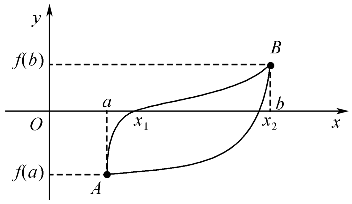

图 2-40

事实上是不存在这样的曲线的. 如果将此曲线理解为闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $y=f(x)$ 的图像,点 A、B 的坐标分表为 $(a,f(a))$ 、$(b,f(b))$. 则可以得到如下结论:如果闭区间上的连续函数 $y=f(x)$ 在区间端点 a,b 处函数值符号相反,则该函数的图像在开区间 (a,b) 内至少与 x 轴有一个交点.

【知识正文】

2.7.1 最大值最小值定理

由中学知识,已知 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的最大值是 1,最小值是 -1. 关于函数的最大值和最小值有如下定义:

定义 1 **设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,点 x_0 是 I 上一点,若对任意的 $x\in I$,均有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 成立,则称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在 I 上的最大值,点 x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的最大值点;若对任意的 $x\in I$,均有 $f(x)\geqslant f(x_0)$ 成立,则称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在 I 上的最小值,点 x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的最小值点.**

定理 1 **闭区间上的连续函数在该区间上一定取得最大值和最小值.**

引例 1 可以给出该定理的直观解释. 该定理说明,若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则存在 $x_1,x_2\in[a,b]$,使得对 $\forall x\in[a,b]$,均有 $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$.

该定理条件"闭区间上"和"连续"二者缺一不可. 如 $y=\dfrac{3}{x-1}$ 在 $(1,2)$ 内连续,但它在 $(1,2)$ 内没有最大值和最小值. 又如函数

$$y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x=1\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在 $[0,2]$ 上有定义,但有间断点 $x=1$,该函数在 $[0,2]$ 上没有最大值也没有最小值(如图2-41所示).

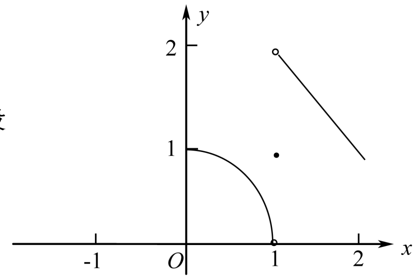

图 2-41

2.7.2　有界性定理

设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，由定理 1，一定存在最大值 M 和最小值 m，使 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，取 $N=\max\{|m|,|M|\}$，则 $\forall x \in [a,b]$，均有 $|f(x)| \leqslant N$ 成立，从而函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 因此有

定理 2　闭区间上的连续函数一定在该区间上有界.

2.7.3　零点定理

定义 2　如果点 x_0 使 $f(x_0)=0$ 成立，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的零点.

例如，$f(x)=x^2-1$，$x_1=1$，$x_2=-1$ 均为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 3　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则一定存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

引例 2 可以给出该定理的直观解释：若 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的上下两个不同的侧，则该曲线一定与 x 轴相交（如图 2-42 所示），交点即为 ξ.

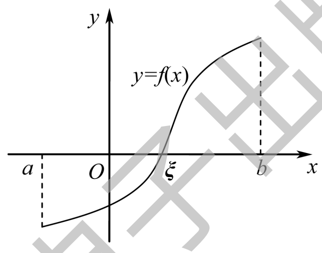

图 2-42

例 1　证明方程 $x^5+x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一实根.

证明　设 $f(x)=x^5+x-1$，显然函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 又 $f(0)=-1$，$f(1)=1$，故 $f(0)f(1)<0$，根据零点定理，一定存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即 $\xi^5+\xi-1=0$，这说明 $x^5+x-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一实根.

例 2　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)>a$，$f(b)<b$，证明 $f(x)=x$ 至少有一实根.

证明　设 $\varphi(x)=f(x)-x$，则函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\varphi(a)=f(a)-a>0$，$\varphi(b)=f(b)-b<0$，故 $\varphi(a)\varphi(b)<0$，由零点定理，$\exists \xi \in (a,b)$，使 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$，所以 $f(x)=x$ 至少有一实根.

2.7.4　介值定理

由定理 3 立即可推得下列较一般性的定理.

定理 4　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=A$，$f(b)=B$，$A \neq B$，则对于 A 与 B 之间的任一数 C，在 (a,b) 内一定存在一点 ξ，使 $f(\xi)=C$.

证明　设函数 $F(x)=f(x)-C$，$F(a)=A-C$，$F(b)=B-C$，故 $F(a)F(b)<0$. 由零点定理，$\exists \xi \in (a,b)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=C$.

【知识与能力拓展】

1. 通过构造函数，使用 Mathematica 软件，画图观察方程 $x^5+3x=1$ 至少有一个实根介于 1 和 2 之间.

2. 闭区间上连续函数的一致连续性

定义 3 设 $f(x)$ 为定义在区间 D 上的函数. 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对任何 $x',x''\in D$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上**一致连续**.

定理 4 闭区间上的连续函数必一致连续.

一致连续性表示：在 $f(x)$ 的连续区间内，任取 x',x''，只要 x',x'' 接近到一定程度 δ，就可使对应的函数值 $f(x')$，$f(x'')$ 达到所指定的接近程度 ε，且 δ 不随自变量 x 的改变而改变. 在数学分析中，对于一些重要定理的证明，函数的一致连续性是十分重要的条件.

【学习效果评估】

(A)

1. 证明：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且无零点，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

2. 设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，$f_1(a)<f_2(a)$，$f_1(b)>f_2(b)$，证明存在 $c\in(a,b)$，使 $f_1(c)=f_2(c)$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $x=a,x=b$ 是 $f(x)=0$ 的两个相邻的根. 试证：若存在 $c\in(a,b)$，使 $f(c)>0$，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内处处为正.

(B)

1. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上有定义且连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明：存在 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

2. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，证明存在 $\xi\in[0,1]$，使 $f(\xi)=\xi$.

(C)

1. 四条腿的椅子能放平稳吗？假设：

(1)椅子四条腿一样长，椅子与地面的接触视为一个点，椅子四脚连线成正方形；

(2)地面的高度视为数学上的连续曲面；

(3)地面起伏不是很大，椅子在任何位置至少有三只脚同时着地；

(4)改变椅子的位置，只要将椅子适当旋转即可.

2. 你能在 $[-2,2]$ 内求出 $\sin x-x=1$ 的一个近似根吗(越精确越好)？

单元训练

一、知识评估

1.单项选择题

(1)函数 $y=\arctan x$ 与 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 定义域的交集为(　　)

(A) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　(B) $(-1,1)$

(C) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　(D) $(-\dfrac{\pi}{2},-1)\cup(1,\dfrac{\pi}{2})$

(2)下列函数为无界函数的是(　　)

(A) $y=\sin 2x$　　(B) $y=1-e^{-x}\quad(x>0)$

(C) $y=3$　　(D) $y=\tan\dfrac{1}{x}$

(3)极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=$(　　)

(A) 0　　(B) 1

(C) -1　　(D)该极限不存在

(4)当 $x\to 0$ 时, $\tan(x^2+2x)$ 是(　　)

(A) x 的同阶无穷小　　(B) x 的高阶无穷小

(C) x 的低阶无穷小　　(D) x 的等价无穷小

(5)已知函数 $f(x)$ 在 x_0 点处连续, 则以下说法错误的是(　　)

(A) x_0 不是 $f(x)$ 的间断点　　(B) $f(x)$ 在 x_0 点处有定义

(C) $f(x)$ 在 x_0 点处的极限存在　　(D) $f(x_0)$ 不一定等于 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

(6)设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}, & x\neq 1\\ -1, & x=1\end{cases}$, 则其间断点的个数是(　　)

(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3

2.填空题

(1)设函数 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$ 的反函数,则 $f^{-1}(32)=$______

(2)已知 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}}, & x<2 \\ \dfrac{x^2-a}{x+\sqrt{a}}, & x\geqslant 2 \end{cases}$，若 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 存在，则常数 $a=$__________

(3)如果 $x\to 0$ 时，要无穷小 $(1-\cos x)$ 与 $a\sin^2\dfrac{x}{2}$ 等价，则常数 $a=$__________

(4)函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2} & x\neq 1 \\ -1 & x=1 \end{cases}$ 的间断点的个数为__________

3.求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^x$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\tan x}{x^2\csc x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}$

4.解答题

(1)设 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$g(f(x))=\ln f(x)$.

①判断 $f(x)$ 的奇偶性、单调性，据此作出 $f(x)$ 的大致图像；

②判断复合函数 $g(x)$ 的定义域和值域.

(2)已知 $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{2}{\sin x}}=e^4$，求 a 的值.

(3)函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 有几个间断点？都是什么类型的？

5.证明题

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(1)=1$. 证明：至少存在一点 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=1-x_0$.

二、单元项目

请参考附录 A2 第一节完成下列案例.

案例 经济预测

搜集一组经济生活中的数据(可通过统计年鉴获得).

(1) 作出坐标系中测量数据的散点图，通过曲线拟合，确定在初等函数中，哪一类与这组数据拟合得最好？

(2) 使用 Mathematica 软件求得与所测量数据拟合最好的函数.

(3) 使用所得函数预测 5 年后的数据.