第 1 章　行列式

本章概述

1. 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

3. n 阶行列式

由 n^2 个元素组成的 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是一个算式，

当 $n=1$ 时，$D = |a_{11}| = a_{11}$；

当 $n=2$ 时，$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$；

当 $n=3$ 时，

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

当 $n \geq 4$ 时，

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

其中，$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式，是在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的所有元素后，余下的元素按原位置不变所构成的 $n-1$ 阶行列式.

4. 行列式按行（列）展开法则

【定理】n 阶行列式 D 等于它的任一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即行列式 D 按照第 i 行的展开式为：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

行列式 D 按照第 j 列的展开式为：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, j = 1, 2, \cdots, n.$$

【推论】n 阶行列式任一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于 0，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j.$$
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j.$$

例如，对三阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二行}} a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= a_{21} \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三列}} a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

$$= a_{13} \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23} \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

5. 行列式的性质

（1）行列式与它的转置行列式的值相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

（2）互换行列式的两行（列），行列式变号. (推论：如果行列式有两行 (列) 完全相同，则该行列式值等于零.)

（3）行列式某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式. (推论：行列式中某一行 (列) 的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.)

（4）行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式值为零.

（5）若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，例如第 i 行的元素都是两数之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式的和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

（6）把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式值不变.

6. 行列式的计算方法

（1）降阶法：通过行列式性质将行列式某行 (列) 中化出更多的零，通常保留一个不为零的元素，将其余元素化为零，然后再按照这一行 (列) 进行展开，从而达到降阶的目的，以便于计算. 对得到的行列式可继续按照如上方法进行降阶，直至降到二阶行列式，就可算出行列式的值.

（2）化三角形法：运用行列式的性质将行列式化为上 (下) 三角形行列式，从而可得行列式的值就是主对角线元素的乘积.

7. 几类特殊行列式的值

（1）上三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

（2）下三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

（3）对角行列式 $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$

（4）* 三阶范德蒙德行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1).$

8. 克莱姆法则

若具有 n 个未知量 n 个方程的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则该方程组有且有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_j=\frac{D_j}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j 是把 D 的第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 换成 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 得到的行列式. 即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\cdots,D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

使用克莱姆法则求解线性方程组时需要注意下述两点：

（1）克莱姆法则仅适用于系数行列式 $D\neq 0$ 且方程个数和未知量个数相等的线性方程组. 方程的个数与未知量个数不等的线性方程组，不能用此法则求解.

（2）克莱姆法则给出了线性方程组的解与系数及常数之间的直接关系表达式，只需求解相应的行列式的值，即可得到方程组的解. 但当 n 较大或有关行列式的值不易求出时，一般不用该法则直接求解，而要使用后续学习的矩阵的初等变换方法求解.

9. 齐次线性方程组

常数项全为 0 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

称为齐次线性方程组. 显然，齐次线性方程组总是有解的，因为 $x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$ 就是方程组的一个解，称为零解.

对于上述齐次线性方程组，若它的系数行列式 $D\neq 0$，由克莱姆法则有 $D_1=0,D_2=0,\cdots,D_n=0$，于是方程组的解就一定是零解. 换句话说，如果它有非零解，那么必有系数行列式 $D=0$.

由克莱姆法则及上述齐次线性方程组解的分析，对于系数行列式 D 存在的非齐次和齐次线性方程组，可得如下结论:

【n 元非齐次线性方程组】系数行列式 $D\neq 0\Rightarrow$ 非齐次线性方程组有唯一解；若非齐次线性方程组无解或者有多个解 $\Rightarrow$ 系数行列式 $D=0$.

【n 元齐次线性方程组】系数行列式 $D\neq 0\Rightarrow$ 齐次线性方程组有唯一零解；若齐次线性方程组有多个解 $\Rightarrow$ 系数行列式 $D=0$.

典型题解析

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$.

【分析】第二行只有一个元素不为零，因此，按照第二行展开进行计算.

【解】$D \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二行}} 2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-14.$

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & -3\\ -2 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 4\end{vmatrix}$.

【分析】此行列式第三行和第三列都有较多的 0，可考虑应用行列式按行（列）展开法则，直接按这些行或者列展开行列式进行计算.

【解】依据行列式按行（列）展开法则，有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & -3\\ -2 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 4\end{vmatrix} &\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三行}} 2\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ -2 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{vmatrix}\\ &\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二列}}(-2)\times(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\\ &=28.\end{aligned}$$

3. 计算行列式 $\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 503 & 201 & 298\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix}$.

【分析】此行列式直接按照对角线法则计算，数据较大. 观察到行列式第二行和第三行元素接近同样的倍数，应用行列式性质 5 将第二元素拆分为两个数之和，使得每个元素拆分的第一个加数和第三行对应元素形成同样的倍数，这样便可化简计算.

【解】将行列式的第二行拆分为两数之和，注意拆分出来的第一个加数与第三行元素对应成比例.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 503 & 201 & 298\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 500+3 & 200+1 & 300+(-2)\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 500 & 200 & 300\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix}\\ &=0+(-70)=-70.\end{aligned}$$

4. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix}$.

【分析】行列式中没有 ± 1，利用倍加性质直接消零比较繁琐. 故先利用倍加性质，化出一个元素为 1 或 -1，再利用这个元素消同列 (行) 其余元素为零，然后再展开计算.

【解】利用降阶法计算：

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_4-2c_1]{\substack{c_2+c_1 \\ c_3-c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & -3 & 2 \\ 14 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一行}} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-2r_3]{r_1-5r_3} \begin{vmatrix} -8 & -33 & 0 \\ 2 & -17 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三列}} \begin{vmatrix} 8 & 33 \\ -2 & 17 \end{vmatrix} = 202.$$

5. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

【分析】一般计算行列式时，应先观察行列式结构上具有什么特点，然后考虑如任何利用这个特点和行列式的性质简化运算. 例如本例可见每行均为 x, y 和 $x+y$，仅是位置不同，因此它们之和是相同的. 于是就可考虑利用列倍加性质.

【解】利用降阶法计算：

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}} 2(x+y) \begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y)(-x^2+xy-y^2).$$

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$.

【分析】结合行列式中元素的特征（多数元素为 1），以及元素中包含的 a, b 的特点，可以利用倍加性质尽可能多化出一些零元素. 比如，将第 2 行的 -1 倍加到第一行，将第 4 行的 -1 倍加到第 3 行，再将 a, b 作为公因子提出来，这样进行下面的化零就容易多了.

【解】利用化上三角形行列式法计算：

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3\div b]{r_1\div a} ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1} ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_{-}r_3} ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = a^2b^2.$$

7. 设三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式（$i,j=1,2,3$），则 $aA_{13}+bA_{23}+cA_{33}$ 对应的三阶行列式为____________.

【解】由行列式的按行（列）展开定理，可得

$$aA_{13}+bA_{23}+cA_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 4 & 5 & b \\ 7 & 8 & c \end{vmatrix}.$$

8. * 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，求第四行元素余子式之和.

【分析】第四行元素的余子式之和为：$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$，我们可以将四个余子式 $M_{41},M_{42},M_{43},M_{44}$ 分别计算出来，再将它们求和即可. 显然这种做法需要计算四个三阶行列式，计算量有些偏大. 那么，除了这种解法，是不是还有另外的解法呢？

代数余子式是在余子式的基础上定义的，由它们的定义可得：

$$M_{41}=-A_{41}, M_{42}=A_{42}, M_{43}=-A_{43}, M_{44}=A_{44}.$$

于是，

$$\begin{aligned} M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44} &= -A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44} \\ &= (-1)\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+(-1)\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}. \end{aligned}$$

这不就是某个行列式按照第四行元素 $-1,1,-1,1$ 的展开式吗？我们将这个行列式记为 D_1. 那么，行列式 D_1 与原行列式 D 有什么关系呢？首先可以确定的是 D_1 的第四行元素一定是 $-1,1,-1,1$，其次可以确定的是 D_1 的第四行的四个元素的代数余子式和行列式 D 的第四

行元素的代数余子式相同. 由于某行元素的代数余子式与该行的元素无关，只与元素的位置有关. 这样，就能确定 D_1 的前三行元素和原行列式 D 的前三行元素相同. 故此，所求 D 的第四行元素余子式之和就等于行列式 D_1 按照第四行的展开式，即等于行列式 D_1 的值.

【解】将第四行元素的余子式之和转化为某个行列式 D_1 按第四行元素的展开式，有

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=(-1)\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+(-1)\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三行}}(-7)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$$

9. 已知行列式 $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=m$，求行列式 $\begin{vmatrix}a_1+2b_1&b_1-c_1&c_1+3a_1\\a_2+2b_2&b_2-c_2&c_2+3a_2\\a_3+2b_3&b_3-c_3&c_3+3a_3\end{vmatrix}$ 的值.

【分析】本题主要考察行列式性质的应用，也就是对所求行列式应用行列式的性质将其用已知行列式表达出来即可.

观察所求行列式，所有元素都是两数之和，可以考虑用行列式性质 5 将其写为两个行列式的和，比如，可以按照第一列元素的两数之和来应用性质 5. 接下来，思路就比较清晰了，应用行列式的列倍加性质和换列性质就能用已知的行列式将所求行列式表示出来.

【解】先按第一列应用用性质 5，再应用列倍加性质：

$$\begin{vmatrix}a_1+2b_1&b_1-c_1&c_1+3a_1\\a_2+2b_2&b_2-c_2&c_2+3a_2\\a_3+2b_3&b_3-c_3&c_3+3a_3\end{vmatrix}\xlongequal[\text{应用性质 5}]{\text{按第一列}}\begin{vmatrix}a_1&b_1-c_1&c_1+3a_1\\a_2&b_2-c_2&c_2+3a_2\\a_3&b_3-c_3&c_3+3a_3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}b_1&b_1-c_1&c_1+3a_1\\b_2&b_2-c_2&c_2+3a_2\\b_3&b_3-c_3&c_3+3a_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1-c_1&c_1\\a_2&b_2-c_2&c_2\\a_3&b_3-c_3&c_3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}b_1&-c_1&c_1+3a_1\\b_2&-c_2&c_2+3a_2\\b_3&-c_3&c_3+3a_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\\b_3&c_3&a_3\end{vmatrix}=m-6m=-5m.$$

10. 问 k 取什么值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}kx+y-z=0\\x+ky-z=0\\2x-y+z=0\end{cases}$$

仅有零解.

【解】方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}k&1&-1\\1&k&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_3}\begin{vmatrix}k&0&-1\\1&k-1&-1\\2&0&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二列}}(k-1)(k+2).$$

由于齐次线性方程组只有零解时，系数行列式不为零，则 $D\neq0$，得到 $k\neq1$ 且 $k\neq-2$.

1.1　二阶行列式和三阶行列式

学习目标

1. 会用对角线法则计算二、三阶行列式的值；
2. 会用二阶行列式求解二元线性方程组；
3. 会用三阶行列式求解三元线性方程组；
4. 理解行列式的形式与本质.

预习导学

1. 由数表 $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ 构成的二阶行列式表示正确的是 (　　).

(A) $\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$　　(B) $\left/\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right/$　　(C) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

2. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=$________________.

3. 由数表 $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$ 构成的二阶行列式为 $\begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix}=$____×____−____×____=________.

4. 三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中，元素 a_{12} 的第一个下标 1 表示__________，第二个下标 2 表示__________，行列式 D 中第 3 行第 2 列的元素是________.

5. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$____.

6. 三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，在 D 的对角线法则计算式中，包含元素 a_{23} 的乘积项 (含符号) 有________项，分别是________________________________.

课堂笔记

课堂练习

1. 计算下列二阶行列式：

(1)$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$　　　　(2)$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

2. 求解二元一次方程组 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 = -6 \end{cases}$.

3. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

4. 若行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & x & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$(　　).

(A) -2　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2

5. 求解三元一次方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

课后作业

⋆⋆⋆ ≪ A 组 ≫ ⋆⋆⋆

1. 利用对角线法则计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$(　　).

(A) -3　　(B) -2　　(C) 2　　(D) 3

3. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

4. 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$.

5. 求解三元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=4 \\ -x_1+2x_3=4 \\ 3x_1+x_2+3x_3=-1 \end{cases}$.

6. 求方程 $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x+1 \\ x-2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ 的根.

⋆⋆⋆ ≪ B 组 ≫ ⋆⋆⋆

1. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$ =____________.

2. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$ 的值等于 (　　).

　(A) $(x+2)(4x-4)$　(B) $(x+2)(5x-4)$　(C) $(x+2)(3x-4)$　(D) $(x+2)(4-5x)$

3. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

4. 设三阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 100 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 0$，则 $a =$________，$b =$________.

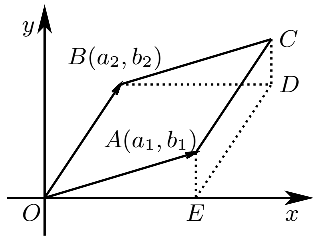
⋆⋆⋆ ≪ C 组 ≫ ⋆⋆⋆

1. 解方程 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0.$

2. 设方程 $\begin{vmatrix}x-1 & -2 & 3\\ 1 & x-4 & 3\\ -1 & a & x-5\end{vmatrix}=0$ 有二重根，求参数 a 的值.

3. 证明等式 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}.$

4. 在 xOy 平面上有一个平行四边形 $OACB$，A, B 两点的坐标分别为 $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2)$，如下图所示，借助二阶行列式求平行四边形 $OACB$ 的面积.



1.2　n 阶行列式与行列式的按行 (列) 展开法则

学习目标

1. 会求行列式中任意一个元素的余子式和代数余子式；
2. 能正确写出行列式按照第一行展开的表达式；
3. 会用行列式按行 (列) 展开法则计算三阶、四阶行列式.

预习导学

1. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ 中，元素 f 的余子式为________，记作____，它是在原行列式中划去________________元素后，剩余元素按原位置不动构成的低一阶的行列式 (请用删除线在原行列式中标出划去的元素).

2. 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中，元素 a_{21} 的代数余子式记为 A_{21}，那么元素 a_{32} 的代数余子式记为______，具体形式为________________.

3. 依据行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$，按照下表例行格式将所给元素的余子式和代数余子式填写完整.

元素	余子式	代数余子式
-2	$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12$	$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -12$
3		
4		
5		

4. 请按照第一行展开的方法计算下列三阶列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

课堂笔记

课堂练习

1. 设三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$，求余子式 M_{11}, M_{12}, M_{13} 及代数余子式 A_{11}, A_{12}, A_{13}.

2. 请使用按行 (列) 展开的方式计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

课后作业

$\star\star\star \ll$ A 组 $\gg \star\star\star$

1. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}$ 的值为(　　).

(A) $abdf$　　(B) $-abdf$　　(C) $abcdef$　　(D) $-abcdef$

2. 写出下列行列式中元素 a_{11}, a_{21}, a_{33} 的代数余子式 A_{11}, A_{21}, A_{33}.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & -4 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. 请用按行 (列) 展开的方式计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 8 \\ 6 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

⋆⋆⋆ ≪ B 组 ≫ ⋆⋆⋆

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.