第七章　向量代数与空间解析几何

一、单元概述

本章主要介绍向量代数与空间解析几何的基本知识.在平面解析几何中,通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来,把平面上的图形与方程对应起来,从而可以用代数方法来研究几何问题.空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样,空间解析几何与向量代数的知识对学习多元函数微积分也是必要的.本章首先建立空间直角坐标系,然后利用坐标讨论向量的运算,并介绍空间解析几何的有关内容.

通过本章的学习,应掌握空间直角坐标系,向量,向量的模,方向角,方向余弦和投影,数量积,向量积,曲面,空间曲线,平面和空间直线等基本概念,以及与之相关的基本性质和基本运算;能运用以上知识进行向量的线性运算,求出数量积、向量积,能够根据条件写出球面、旋转曲面、柱面、空间曲线、平面和空间直线的方程.

二、学习重点与难点

1. 学习重点

重点掌握向量及其线性运算的概念,能够利用坐标作向量的线性运算,会求向量的单位向量,会求向量的模、方向余弦和方向角;

重点掌握数量积和向量积的概念,能够求出两个向量的数量积和向量积,能够利用向量积求出三角形的面积;

重点掌握曲面及其方程的概念,能够根据所给条件写出球面、旋转曲面和柱面的方程;

重点掌握平面及其方程的概念,能够根据所给条件写出平面的点法式方程、一般方程和截距式方程,能够求出两平面的夹角;

重点掌握空间直线及其方程的概念,能够根据所给条件写出直线的对称式方程和参数方程.

2. 学习难点

向量积的概念和计算;空间曲线及其方程.

3. 难点指南

向量积的概念和计算:结合物理中的力矩介绍向量积的概念,通过复习线性代数中三阶行列式的计算掌握向量积的计算;

空间曲线及其方程:在 Mathematica 软件辅助下,通过直观的展示曲线图像理解空间曲线的概念.

第1节 向量及其线性运算

本节主要介绍空间直角坐标系的概念、向量的概念以及向量的线性运算.

【学习目标】

理解空间直角坐标系的概念,能够判断给定坐标的点在空间直角坐标系中的位置,会求对称点的坐标,会求空间中两点之间的距离;

重点掌握向量及其线性运算的概念,能够利用坐标进行向量的线性运算,会求向量的单位向量,会求向量的模、方向余弦和方向角.

【知识引入】

引例1 如图7-1-1所示,如何求出多面体任意两顶点间的距离呢?根据平面直角坐标系的知识,可以做一个通过该两点的平面,并在该平面上建立平面直角坐标系,找到该两点的平面直角坐标,进而利用平面上两点间的距离公式$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$来求出.但是,如果是要计算多面体每两个顶点之间的距离呢?是否需要每两个点都要做一个平面,并在该平面上建立一个平面直角坐标系呢?这样将会做很多重复工作,因为需要建立很多个平面直角坐标系,而且一个顶点在多个平面直角坐标系上分别找到其坐标也相当困难.那么能否只建立一个坐标系,使得每一个顶点在该坐标系上都有确定的坐标,而不需要在多个平面直角坐标系中分别找到其坐标呢?进而,是否也有一个和平面上两点间的距离公式$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$类似的公式存在呢?这样的坐标系是存在的,就是空间直角坐标系,类似的空间两点间的距离计算公式也是存在的.

引例2 客观世界有各种各样的量,比如,时间、质量、长度、距离、力、速度、位移、加速度等.我们知道,时间过了5分钟就是5分钟,非常明确.但如果描述飞机飞行速度时,只说飞机以600公里/小时的速度飞行,就不十分明确,它往哪个方向飞呢?所以刻画速度时,既要有大小,还要有方向.力、位移、加速度都属于这一类的量,这样的量我们称为“向量”.

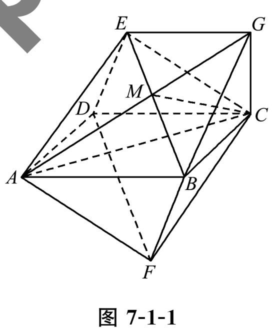

图7-1-1

图7-1-2

【知识正文】

1. 空间直角坐标系

(1)空间直角坐标系

中学时就已经知道,通过平面直角坐标系,可以将平面上的点与一对有序实数对应起来,从而可用代数方法来讨论几何问题. 现将这种思想加以推广,引进空间直角坐标系,从而将空间中的点用一个有序数组来表示.

在空间中取定一点 O 作为原点,通过该点作三条相互垂直的数轴,分别记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴),统称为坐标轴. 三个坐标轴上的单位长度通常都相同(这些长度单位也可以不同,但本章中,如无特别声明,则三个轴上都取相同的长度单位). 通常将 x 轴和 y 轴置于水平面上,z 轴取铅直方向. 如图 7-1-3 所示,三个坐标轴的次序和方向按右手法则来确定. 即用右手握住 z 轴,四个手指从 x 轴的正向旋转 $90°$ 到 y 轴的正向时,拇指的指向就是 z 轴的正向.

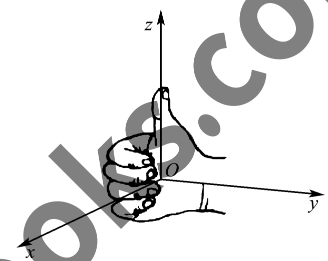

图 7-1-3

由任意两条坐标轴所确定的平面称之为坐标面. x 轴和 y 轴所在的平面称为 xOy 坐标面,另外两个坐标面分别是 yOz 坐标面和 zOx 坐标面. 如图 7-1-4 所示,三个坐标面将整个空间分为 8 个部分,每一部分称为一个卦限. 含有 x 轴、y 轴和 z 轴的正半轴的那个卦限称为第一卦限,其他第二、第三、第四卦限都在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定. 第五卦限在第一卦限下方,第六、第七、第八卦限也都在 xOy 面的下方,按逆时针方向确定. 这八个卦限分别用罗马数字Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ来表示.

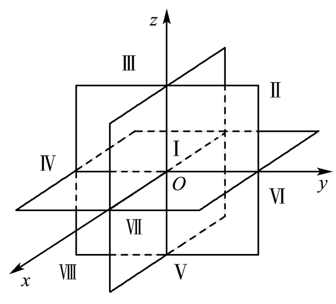

图 7-1-4

在上面建立的坐标系中,坐标轴、坐标面都是两两垂直的,故称之为**空间直角坐标系**.

(2)空间点的坐标

如图 7-1-5 所示,设 M 为空间中的一点,过该点作三个分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面,它们与 x 轴、y 轴和 z 轴分别交于 P 点、Q 点和 R 点. 这三个点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x、y 和 z. 从而空间中的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z). 反之,给定一个有序数组 (x,y,z),则可分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上取坐标为 x、y、z 的三个点 P、Q、R,过这三个点分别作一个与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面,这三个平面有唯一的交点,这个交点就是有序数组 (x,y,z) 所确定的点 M.

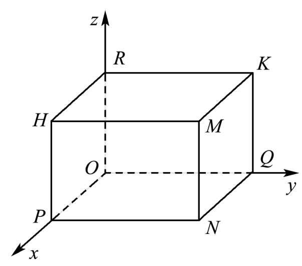

图 7-1-5

这样,利用空间直角坐标系,就在有序数组 (x,y,z) 与空间中的点 M 之间建立了一一对应关系. 有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标. 其中 x、y 和 z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 在以后的表述中,常把一个点和表示这个点的坐标不加区别,所说的给定一点,就

是给定这个点的坐标，所说的求一个点，就是求一个点的坐标.

坐标面，坐标轴上的点的坐标有一定的特点：

xOy 坐标面上的点的坐标为$(x,y,0)$；yOz 坐标面上的点的坐标为$(0,y,z)$；zOx 坐标面上的点的坐标为$(x,0,z)$.

x 轴上的点的坐标为$(x,0,0)$；y 轴上的点的坐标为$(0,y,0)$；z 轴上的点的坐标为$(0,0,z)$.

设 $M(x,y,z)$为空间中一点，从点 M 向 xOy 坐标面作垂线，设垂足为 N，则易知点 N 的坐标为$(x,y,0)$. 点 N 称为点 M 在 xOy 坐标面上的投影. 同理可知，点 $K(0,y,z)$和点 $H(x,0,z)$分别是 M 点在 yOz 坐标面与在 zOx 坐标面上的投影.

(3)空间两点间的距离

若 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间任意两点，如图 7-1-6 所示，可计算 M_1M_2 的距离为

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2,$$
$$=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

而
$$|M_1P|=|x_2-x_1|,$$
$$|PN|=|y_2-y_1|,$$
$$|NM_2|=|z_2-z_1|,$$

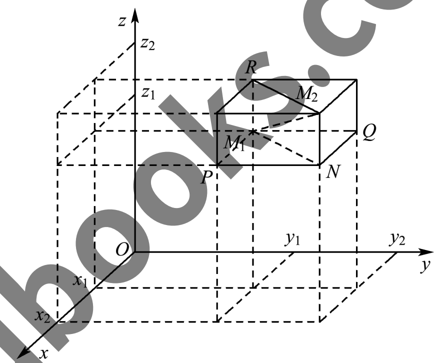

图 7-1-6

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7-1-1}$$

特殊地，若两点分别为 $M(x,y,z)$，$O(0,0,0)$，则

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 求证以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证明
$$|M_1M_2|^2=(4-7)^2+(3-1)^2+(1-2)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$$

由于$|M_2M_3|=|M_3M_1|$，所以原结论成立.

例 2 在 z 轴上求一点 M，使点 M 到点 $A(1,0,2)$和到点 $B(1,-3,1)$的距离相等.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，故可设点 M 的坐标为$(0,0,z)$，根据题意有

$$\sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(0+3)^2+(z-1)^2},$$

解得 $z=-3$，即点 M 的坐标是$(0,0,-3)$.

2. 向量及其线性运算

(1)向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向. 例如力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫作**向量**.

向量可用粗体字母表示，也可用上加箭头书写体字母表示，例如，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、

$\vec{F}$. 在几何上，通常用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量(图 7-1-7). 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 如果线段的起点是 M_1，终点是 M_2，那么这个有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{M_1M_2}$.

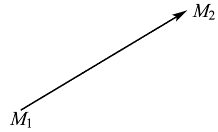

图 7-1-7

在实际问题中，有些向量与起点有关(例如一个力与该力的作用点的位置有关)，有些向量与其起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学上只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称**向量**. 因此，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移后可以完全重合.

向量的大小叫作向量的**模**. 向量 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量叫作**单位向量**. 模等于 0 的向量叫作**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 零向量认为是与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此，两向量平行又称两向量**共线**.

类似还有共面的概念. 设有 k $(k\geqslant 3)$个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量**共面**.

(2)向量的线性运算

向量的加法　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 7-1-8).

上述作出两向量之和的方法叫作向量加法的**三角形法则**. 另一种求和的方法称为**平行四边形法则**：当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形，从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 7-1-9).

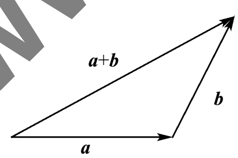

图 7-1-8

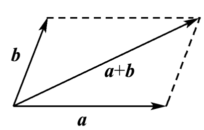

图 7-1-9

向量的加法的运算规律：

①交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

②结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ $(n\geqslant 3)$相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 7-1-10 所示，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4.$$

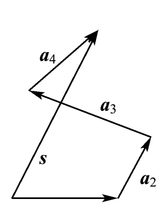

图 7-1-10

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记为 $-\boldsymbol{a}$. 因此,我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上,便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 7-1-11).

特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

显然,任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O,有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,因此,若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 7-1-12).

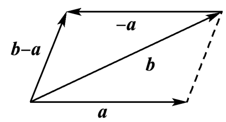

图 7-1-11

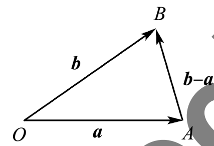

图 7-1-12

由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

向量与数的乘法 向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向可以是任意的.

特别地,当 $\lambda=\pm1$ 时,有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘法的运算规律:

①结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

②分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的相加以及数乘向量统称为向量的**线性运算**.

例 3 在平行四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$,其中 M 是平行四边形对角线的交点(图 7-1-13).

解 由于平行四边形的对角线互相平分,所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MA},$$

于是 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

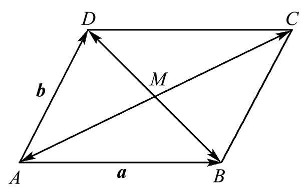

图 7-1-13

因为 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$,所以

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a});\quad \overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

通常把与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记为 $\boldsymbol{e}_a$（图7-1-14）. 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，由数与向量乘积的定义，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a,\quad \boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

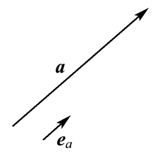

图 7-1-14

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量. 这一过程又称为将向量**单位化**.

由于 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此常用数与向量的乘积来说明两个向量的平行关系.

定理 1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

再证明数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\quad 即\,|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

3. 利用坐标作向量的线性运算

（1）向量的坐标表示

把向量放在直角坐标系中讨论，就可以引进向量的坐标，这样向量与有序数组就联系起来，从而可以用代数的方法来研究向量.

在空间直角坐标系中，分别在三个坐标轴上取与 x,y,z 轴同方向的单位向量，称为**坐标向量**，分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 为空间的任意向量，将 $\boldsymbol{r}$ 平移使起点在坐标原点 O，终点 M 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$.

以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体（图 7-1-15），有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

显然 $\overrightarrow{OP}$ 是平行于 $\boldsymbol{i}$ 的，而且有 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$. 同理有 $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$. 因此可得

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**. 有序数 x、y、z 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标表达式**.

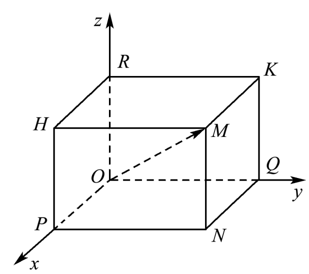

图 7-1-15

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

如果已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标分解式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表达式为$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，由此可知空间中任意向量的坐标等于终点坐标减去起点对应坐标.

(2)利用坐标作向量的线性运算

利用向量在直角坐标系中的坐标表达式，就可以把向量的几何运算转化为代数运算. 设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律以及向量与数的乘法的结合律与分配律，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).\end{aligned}$$

由此可见，对向量进行加、减及数乘运算，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

由定理1，当向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时，向量$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$相当于$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，坐标表示式为$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$，也就相当于向量$\boldsymbol{b}$与向量$\boldsymbol{a}$对应的坐标成比例，于是$\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$.

例4 求解以向量为未知元的线性方程组$\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$，其中$\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$.

解 如同解二元一次线性方程组，可得

$$\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}.$$

以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的坐标表示式代入，即得

$$\boldsymbol{x}=2(2,1,2)-3(-1,1,-2)=(7,-1,10),$$
$$\boldsymbol{y}=3(2,1,2)-5(-1,1,-2)=(11,-2,16).$$

例5 已知两点$A(x_1,y_1,z_1)$和$B(x_2,y_2,z_2)$以及实数$\lambda\neq-1$，在直线AB上求一点M，使$\overrightarrow{AM}=\lambda\mathrm{MB}$.

解 如图7-1-16所示，由于$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$，因此

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

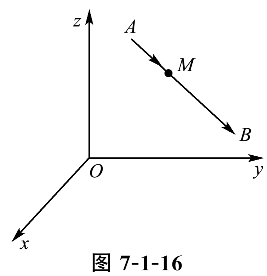

图 7-1-16

这就是点M的坐标.

另解　设所求点为 $M(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$，$\overrightarrow{MB}=x_2-x,y_2-y,z_2-z$. 依题意有 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$

$$(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)-\lambda(x,y,z),$$

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2),$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 当 $\lambda=1$ 时，点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

4. 向量的模、方向角、投影

(1)向量的模

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$(图 7-1-17)，则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2},$$

由 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，有 $|\overrightarrow{OP}|=|x|$，$|\overrightarrow{OQ}|=|y|$，$|\overrightarrow{OR}|=|z|$，于是得向量模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

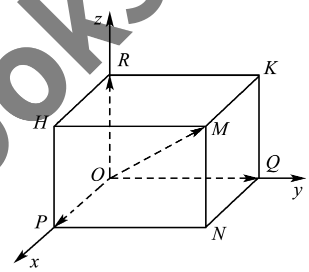

图 7-1-17

例 6　已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解　因为 $\overrightarrow{AB}=(7,1,3)-(4,0,5)=(3,1,-2)$，所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14},$$

于是

$$\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}}\right).$$

(2)方向角与方向余弦

当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时，两个向量之间的不超过 π 的夹角称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

类似地，可以规定向量与一个数轴的夹角或空间两个数轴的夹角.

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别记为 α、β、γ，称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**(图 7-1-18).

设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,\quad y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,\quad z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma.$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.

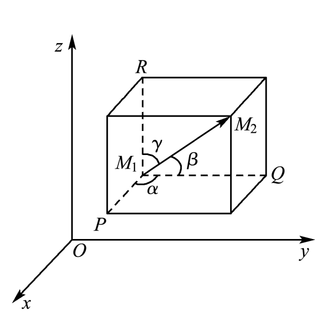

图 7-1-18

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

从而$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r$.

上式表明,以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$,因此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 7 设已知两点 $A(2,2,\sqrt{2})$ 和 $B(1,3,0)$,计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $$\overrightarrow{AB}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2});$$

所以 $$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2;$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

(3)向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴(图 7-1-19).

任给向量 $\boldsymbol{r}$,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'(点 M' 叫作**点 M 在 u 轴上的投影**),则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$,则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的**投影**,记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$.

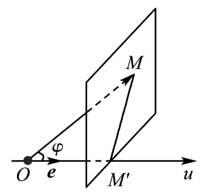

图 7-1-19

按此定义,向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影,即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\quad a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}.$$

由此可知,向量的投影具有与坐标相同的性质:

性质 1 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$,其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角(图 7-1-20);

性质 2 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$(图 7-1-21);

性质 3 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

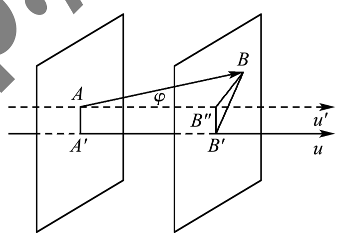

图 7-1-20

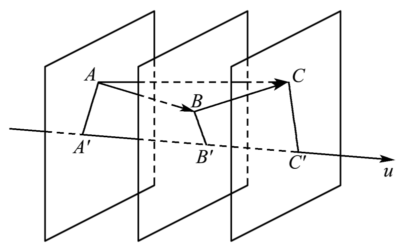

图 7-1-21

【知识拓展】

数学家：勒内·笛卡尔(一)


勒内·笛卡尔

勒内·笛卡尔1596年3月31日生于法国安德尔—卢瓦尔省的图赖讷(现笛卡尔，因笛卡尔得名)，1650年2月11日逝世于瑞典斯德哥尔摩，是世界著名的法国哲学家、数学家、物理学家.他对现代数学的发展做出了重要的贡献，因将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父.他还是西方现代哲学思想的奠基人，是近代唯物论的开拓者且提出了"普遍怀疑"的主张.黑格尔称他为"现代哲学之父".他的哲学思想深深影响了之后的几代欧洲人，开拓了所谓"欧陆理性主义"哲学.堪称17世纪的欧洲哲学界和科学界最有影响的巨匠之一，被誉为"近代科学的始祖".

笛卡尔1岁多时母亲患肺结核去世，而他也受到传染，造成体弱多病.但他学习成绩优异，老师便允许他不用早起运动.而笛卡尔因而养成了利用这段时间冥想的习惯.母亲去世后，父亲移居他乡并再婚，而把笛卡尔留给了他的外祖母带大，自此父子很少见面，但是父亲一直提供金钱方面的帮助，使他能够受到良好的教育.

笛卡尔8岁时就进入拉夫赖士(La Flèche)的耶稣会学校接受教育，受到良好的古典学以及数学训练.1613年到普瓦捷大学学习法律，1616年毕业.毕业后笛卡尔一直对职业选择不定，又决心游历欧洲各地，专心寻求"世界这本大书"中的智慧.因此他于1618年在荷兰入伍，随军远游.

在笛卡尔的时代，拉丁文是学者的语言.他也如当时的习惯，在他的著作上签上他的拉丁化的名字——Renatus Cartesius(瑞那图斯·卡提修斯).正因为如此，他首创的直角坐标系也称卡提修坐标系(常称笛卡尔坐标系).

笛卡尔对数学与物理学的兴趣是在荷兰当兵期间产生的.1618年11月10日，他偶然在路旁公告栏上，看到用佛莱芒语提出的数学问题征答.这引起了他的兴趣，并且让身旁的人，将他不懂的佛莱芒语翻译成拉丁语.这位身旁的人就是大他八岁的以撒·贝克曼(Isaac Beeckman).贝克曼在数学和物理学方面有很高造诣，很快成了他的心灵导师.4个月后，他写信给贝克曼："你是将我从冷漠中唤醒的人……"，并且告诉他，自己在数学上有了4个重大发现.

1621年笛卡尔退伍.

1622年，当他26岁时，笛卡尔变卖掉父亲留下的资产，用4年时间游历欧洲，其中在意大利住了2年，随后迁住于巴黎.

1628年移居荷兰，在那里住了20多年.在此期间，笛卡尔专心致力于哲学研究，并逐渐形成自己的思想.他在荷兰写作且发表了多部重要的文集，包括了《方法论》《形而上学的沉思》(Méditations métaphysiques)和《哲学原理》(Les Principes de la philosophie)等.

1649年笛卡尔受瑞典克里斯蒂娜女王之邀来到斯德哥尔摩，但不幸在这片"熊、冰雪与岩石的土地"上得了肺炎，并在1650年2月去世.

1663年他的著作在罗马和巴黎被列入禁书之列.1740年，巴黎才解除了禁令，那是为了

对当时在法国流行起来的牛顿世界体系提供一个替代的东西.

他的哲学与数学思想对历史的影响是深远的.人们在他的墓碑上刻下了这样一句话:“笛卡尔,欧洲文艺复兴以来,第一个为人类争取并保证理性权利的人.”

人物轶事

《数学的故事》里面说到了数学家笛卡尔的爱情故事.笛卡尔于1596年出生在法国,欧洲大陆爆发黑死病时他流浪到瑞典,认识了瑞典一个小公国18岁的公主克里斯蒂娜,后成为她的数学老师,日日相处使他们彼此产生爱慕之心,公主的父亲国王知道了后勃然大怒,下令将笛卡尔处死,后因女儿求情将其流放回法国,克里斯蒂娜公主也被父亲软禁起来.笛卡尔回法国后不久便染上重病,他日日给公主写信,因被国王拦截,克里斯蒂娜一直没收到笛卡尔的信.笛卡尔在给克里斯蒂娜寄出第十三封信后就气绝身亡了,这第十三封信内容只有短短的一个公式:$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(1-\sin\theta)$.国王看不懂,觉得他们俩之间并不是总是说情话的,大发慈悲就把这封信交给一直闷闷不乐的克里斯蒂娜,公主看到后,立即明了恋人的意图,她马上着手把方程的图形画出来,看到图形,她开心极了,她知道恋人仍然爱着她,原来方程的图形是一颗心的形状.这也就是著名的“心形线”.

克里斯蒂娜女王(左)
和笛卡尔(右)

国王死后,克里斯蒂娜登基,立即派人在欧洲四处寻找心上人,无奈斯人已故,先她走一步了,徒留她孤零零在人间……

据说这封享誉世界的另类情书还保存在欧洲笛卡尔的纪念馆里.

但事实在历史上,笛卡尔和克里斯蒂娜的确有过交情.但笛卡尔是1649年10月4日应克里斯蒂娜邀请才来到瑞典,而当时克里斯蒂娜已成为瑞典女王.笛卡尔与克里斯蒂娜谈论的主要是哲学问题而不是数学.有资料记载,由于克里斯蒂娜女王时间安排很紧,笛卡尔只能在早晨五点与她探讨哲学.笛卡尔真正的死因是因天气寒冷加上过度操劳患上的肺炎,而不是黑死病.

数学

笛卡尔最杰出的成就是在数学发展上创立了解析几何学.在笛卡尔时代,代数还是一个比较新的学科,几何学的思维还在数学家的头脑中占有统治地位.笛卡尔致力于代数和几何联系起来的研究,于1637年在创立了坐标系后,成功地创立了解析几何学.他的这一成就为微积分的创立奠定了基础.解析几何直到现在仍是重要的数学方法之一.此外,现在使用的许多数学符号都是笛卡尔最先使用的,这包括了已知数a,b,c以及未知数x,y,z等,还有指数的表示方法.他还发现了凸多面体边、顶点、面之间的关系,后人称为欧拉—笛卡尔公式.还有积分中常见的笛卡尔叶形线也是他发现的.

解析几何的创立

据说有一天,笛卡尔生病卧床,病情很重,尽管如此他还反复思考一个问题:几何图形是直观的,而代数方程是比较抽象的,能不能把几何图形和代数方程结合起来,也就是说能不能用几何图形来表示方程呢?要想达到此目的,关键是如何把组成几何图形的点和满足方程的每一组“数”挂上钩,他苦苦思索,拼命琢磨,通过什么样的方法,才能把“点”和“数”联系

起来.突然,他看见屋顶角上的一只蜘蛛,拉着丝垂了下来.一会工夫,蜘蛛又顺这丝爬上去,在上边左右拉丝.蜘蛛的“表演”使笛卡尔的思路豁然开朗.他想,可以把蜘蛛看作一个点.他在屋子里可以上、下、左、右运动,能不能把蜘蛛的每一个位置用一组数确定下来呢?他又想,屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条线,如果把地面上的墙角作为起点,把交出来的三条线作为三根数轴,那么空间中任意一点的位置就可以在这三根数轴上找到有顺序的三个数.反过来,任意给一组三个有顺序的数也可以在空间中找到一点 P 与之对应,同样道理,用一组数 (x,y) 可以表示平面上的一个点,平面上的一个点也可以用一组两个有顺序的数来表示,这就是坐标系的雏形.

【学习评测】

(A)

1. 判断下列各点在空间直角坐标系中的位置.

$A(0,0,3)$;　$B(4,-2,0)$;　$C(0,6,0)$;　$D(-2,0,0)$;

$E(0,-7,1)$;　$F(-1,0,-2)$;　$G(1,2,3)$;　$H(3,4,-1)$.

2. 求点 $A(2,-1,3)$ 关于原点、三个坐标轴、三个坐标面的对称点的坐标.

3. 在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

4. 求证以 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

5. 求点 $A(4,-3,5)$ 到各坐标轴、各坐标面的距离.

6. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

7. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$.试用坐标表达式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

8. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}(6,7,-6)$ 的单位向量.

9. 已知两向量 $\boldsymbol{a}(\lambda,2,1)$, $\boldsymbol{b}(0,-1,\mu)$ 平行,求 λ, μ 的值.

10. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,5,4)$, $\boldsymbol{b}(-6,1,2)$, $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 及与其方向一致的单位向量.

11. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$:

(1)求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模;　(2)求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向一致的单位向量;

(3)求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦和方向角;　(4)求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴成相等的锐角,求它的方向余弦.

13. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4,它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

(B)

1. 已知 $A(x,2,3)$ 与 $B(-2,y,z)$,根据下列条件分别求 $x+y+z$ 的值:

(1) A 与 B 关于 x 轴对称;　(2) A 与 B 关于 xOy 面对称.

2. 已知点 $A(3,a,7)$, $B(2,-1,5)$,且 $|\overrightarrow{AB}|=3$,求 a 的值.

3. 求证以 $A(1,-2,11)$、$B(4,2,3)$、$C(6,-1,4)$ 三点为顶点的三角形是一个直角三角形.

4. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$,$C(0,5,1)$等距离的点.

5. 把 ΔABC 的边 BC 五等分,设分点依次为D_1、D_2、D_3、D_4,再把各分点与点 A 连接(图 7-1-22). 试以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量$\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.

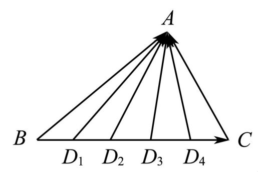

图 7-1-22

6. 设向量的方向余弦分别满足:(1) $\cos\alpha=0$;(2) $\cos\beta=1$;(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

7. 设点 A 位于第一卦限,向径$\overrightarrow{OA}$与 x 轴和 y 轴的夹角分别为$\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{\pi}{4}$,且$|\overrightarrow{OA}|=6$,求点 A 的坐标.

8. 一向量与 x 轴,y 轴的夹角相等,而与 z 轴的夹角是前者的两倍,求该向量的方向角.

9. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求向量 $\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

(C)

1. 结晶体的基本单位称为晶胞,图 7-1-23 是食盐晶胞的示意图(可看成是八个棱长为$\dfrac{1}{2}$的小正方体堆积成的正方体),其中实心点“●”代表钠离子,空心点“○”代表氯离子,如图建立空间直角坐标系 $Oxyz$ 后,写出图中标号 1 至 6 的离子的坐标.

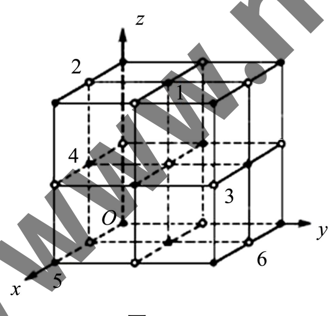

图 7-1-23

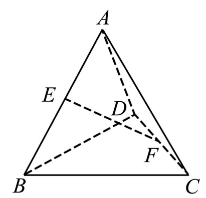

图 7-1-24

2. 如图 7-1-24 所示,已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1,E,F 分别为棱 AB,CD 的中点.

(1)建立适当的空间直角坐标系,写出定点 A,B,C,D 的坐标;

(2)求 EF 的长.

3. 某人从 A 点出发向东走了 5 米到达 B 点,然后改变方向按东北方向走了 $10\sqrt{2}$ 米到达 C 点,到达 C 点后又改变方向向西走了 10 米到达 D 点.

(1)作出向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$;

(2)求$\overrightarrow{AD}$的模.

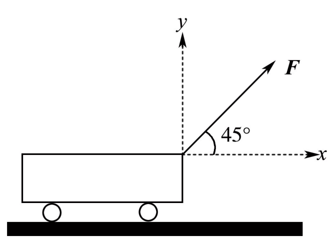

图 7-1-25

4. 如图 7-1-25 所示,在光滑的水平地板上,用同地板成 45°角的 20 磅力 $\boldsymbol{F}$ 拖一辆小车. 使小车向前移动的有效

力有多大？

5. 一架喷气式客机向正东以 500 英里/小时的速度飞行，在飞行途中遇到一股从机尾吹来的东北方向60°的风，风速为 70 英里/小时，飞机罗盘方位保持正东方向，但是由于风力而获得新的地面速度和航向，这个航速和航向是什么？

6. 如图 7-1-26 所示，一只鸟从它的巢朝东北方向 30°飞 6km，停留一棵树上休息. 然后朝着东南方向飞 $3\sqrt{2}$ km，降落在一根电线杆顶端，把坐标系的原点设在鸟巢处，x 轴指向东，y 轴指向北，试求：

(1)树在什么点？

(2)电线杆在什么点？

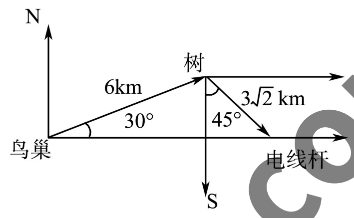

图 7-1-26

7. 如图 7-1-27 所示，马克用 60N 的力沿南偏东方向推一根柱子，丹用 80N 的力沿南偏西方向推同一根柱子. 求两人的合力的大小及方向.

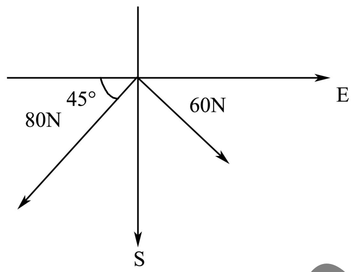

图 7-1-27

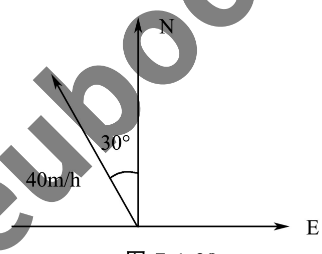

图 7-1-28

8. 如图 7-1-28 所示，已知风速为 40m/h，风向为北偏西 30°. 一架飞机在无风时飞行速度为 80m/h，这架飞机需要朝北飞行，请问这架飞机该朝什么方向才能使其径直的朝北飞行，此时飞机相对于地面的速度为多少？

第2节　数量积　向量积

本节主要介绍向量的数量积和向量积.

【学习目标】

重点掌握数量积和向量积的概念,能够求出两个向量的数量积和向量积,能够利用向量积求出三角形的面积.

【知识引入】

引例1　一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2. 以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$(图7-2-1). 由物理学知道,力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 等于力 $\boldsymbol{F}$ 在位移方向上的分力$|\boldsymbol{F}|\cos\theta$($\theta$ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角)乘以位移的大小$|\boldsymbol{s}|$, 即

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

由此可见,功的数量是由 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 这两个向量所唯一确定的. 在物理学和力学的其他问题中,也常常会遇到此类情况. 为此,在数学中把这种运算抽象成两个向量的数量积的概念.

引例2　在研究物体的转动问题时,不但要考虑此物体所受的力,还要分析这些力所产生的力矩. 设 O 为一根杠杆 L 的支点. 有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆上 P 点处. $\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ(图7-2-2). 由力学规定,力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$,它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{M}$ 的指向是按右手规则从$\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 来确定的,即当右手的四个手指从$\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时,大拇指的指向就是 $\boldsymbol{M}$ 的指向(图7-2-3).

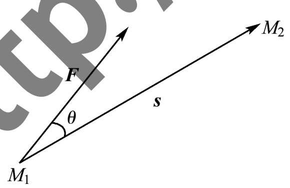

图 7-2-1

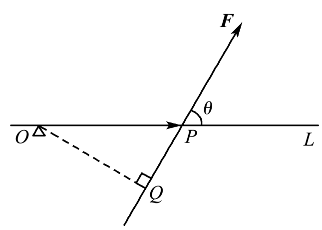

图 7-2-2

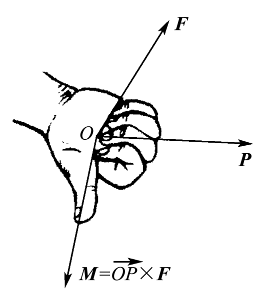

图 7-2-3

根据这种由两个已知向量按上面的规则来确定另一个向量的运算,在数学中抽象出两向量的向量积的概念.

【知识正文】

1. 两向量的数量积

定义 1　设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的模 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(或称**内积**、**点积**)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

引例 1 中常力所作的功就是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

同理，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

这就是说，两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在该向量的方向上的投影的乘积.

根据数量积的定义，可以推得

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

如果认为零向量与任何向量都垂直，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积满足下列运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

证明　因为当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，上式显然成立；当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda$、$\mu$ 为常数.

例 1　试用向量证明三角形的余弦定理.

证明　设在 ΔABC 中，$\angle BCA=\theta$ (图 7-2-4)，$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，要证

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

记 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，则有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

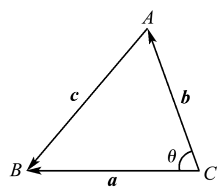

图 7-2-4

从而

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

即

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

下面利用数量积的性质和运算规律来推导数量积的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\\&\quad a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

设 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，则当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，根据 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

例 2 已知三点 $M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解 从 M 到 A 的向量记为 $\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，从 M 到 B 的向量记为 $\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{b}=(1,0,1)$，从而$\angle AMB$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times0+0\times1=1,\quad |\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

所以

$$\cos\angle AMB=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

从而

$$\angle AMB=\frac{\pi}{3}.$$

2. 两向量的向量积

定义 2 设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出：

(1) $\boldsymbol{c}$ 的模为 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角；

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定(图7-2-5).

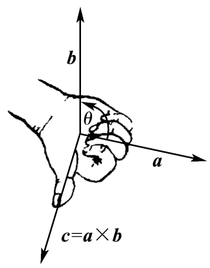

图 7-2-5

那么，向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(或称**外积**、**叉积**)，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

根据向量积的定义，力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于$\overrightarrow{OP}$与 $\boldsymbol{F}$ 的向量积，即 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

根据向量积定义，可以推得：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(2) 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，如果$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

如果认为零向量与任何向量都平行，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量积满足下列运算律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (λ 为常数).

下面利用向量积的性质和运算规律来推导向量积的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$. 按向量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+\\&\quad a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

为了帮助记忆，利用三阶行列式符号，上式可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_xb_y\boldsymbol{k}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_zb_y\boldsymbol{i}\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 3　设 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,2)$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$

例 4　已知 ΔABC 的顶点分别是 $A(1,2,3)$、$B(3,4,5)$、$C(2,4,7)$，求 ΔABC 的面积.

解　根据向量积的定义，可知 ΔABC 的面积为

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

于是

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

【知识拓展】

数学家：勒内·笛卡尔（二）——人物成就

哲学

笛卡尔被广泛认为是西方近代哲学的奠基人，他第一个创立了一套完整的哲学体系. 哲学上，笛卡尔是一个二元论者以及理性主义者. 笛卡尔认为，人类应该可以使用数学的方法——也就是理性——来进行哲学思考. 他相信，理性比感官的感受更可靠. 他从逻辑学、几何学和代数学中发现了 4 条规则：

(1)除了清楚明白的观念外，绝不接受其他任何东西；

(2)必须将每个问题分成若干个简单的部分来处理；

(3)思想必须从简单到复杂；

(4)我们应该时常进行彻底的检查，确保没有遗漏任何东西.

笛卡尔将这种方法不仅运用在哲学思考上，还运用于几何学，并创立了解析几何. 由此，笛卡尔第一步就主张对每一件事情都进行怀疑，而不能信任我们的感官. 从这里他悟出一个道理：他必须承认的一件事就是他自己在怀疑. 而当人在怀疑时，他必定在思考，由此他推出了著名的哲学命题——“我思故我在”. 笛卡尔将此作为形而上学中最基本的出发点，从这里他得出结论，“我”必定是一个独立于肉体的、在思维的东西. 笛卡尔还试图从该出发点证明

出上帝的存在.笛卡尔认为,我们都具有对完美实体的概念,由于我们不可能从不完美的实体上得到完美的概念,因此有一个完美实体——即上帝——必定存在.从所得到的两点出发,笛卡尔再次证明,现实世界中有诸多可以用理性来察觉的特性,即它们的数学特性(如长、宽、高等),当我们的理智能够清楚地认知一件事物时,那么该事物一定不会是虚幻的,必定是如同我们所认知的那样.


笛卡尔的手稿

虽然笛卡尔证明了真实世界的存在,他认为宇宙中共有两个不同的实体,即精神世界和物质世界(“灵魂”和“扩延”),两者本体都来自上帝,而上帝是独立存在的.他认为,只有人才有灵魂,人是一种二元的存在物,既会思考,也会占空间,而动物只属于物质世界.

笛卡尔强调思想是不可怀疑的这个出发点,对此后的欧洲哲学产生了重要的影响.但是它的基础“我思故我在”被后人证明并不是十分可靠的,因为该公式其实是建基于承认思想是一个自我意识这一隐蔽着的假设上的,如果摈弃了自我意识,那么笛卡尔的论证就失败了.而笛卡尔证明上帝存在的论点,也下得很匆忙.

笛卡尔强调科学的目的在于造福人类,使人成为自然界的主人和统治者.他反对经院哲学和神学,提出怀疑一切的“系统怀疑的方法”.但他还提出了“我思故我在”的原则,强调不能怀疑以思维为其属性的独立的精神实体的存在,并论证以广延为其属性的独立物质实体的存在.他认为上述两实体都是有限实体,把它们并列起来,这说明了在形而上学或本体论上,他是典型的二元论者.笛卡尔还企图证明无限实体,即上帝的存在.他认为上帝是有限实体的创造者和终极的原因.笛卡尔的认识论基本上是唯心主义的.他主张唯理论,把几何学的推理方法和演绎法应用于哲学上,认为清晰明白的概念就是真理,提出“天赋观念”.

笛卡尔的自然哲学观同亚里士多德的学说是完全对立的.他认为,所有物质的东西,都是为同一机械规律所支配的机器,甚至人体也是如此.同时他又认为,除了机械的世界外,还有一个精神世界存在,这种二元论的观点后来成了欧洲人的根本思想方法.

物理学

笛卡尔靠着天才的直觉和严密的数学推理,在物理学方面做出了有益的贡献.从1619年读了开普勒的光学著作后,笛卡尔就一直关注着透镜理论;并从理论和实践两方面参与了对光的本质、反射与折射率以及磨制透镜的研究.他把光的理论视为整个知识体系中最重要的部分.

笛卡尔运用他的坐标几何学从事光学研究,在《屈光学》中第一次对折射定律提出了理论上的推证.笛卡尔发现了动量守恒原理.他还发展了宇宙演化论、漩涡说等理论学说,虽然具体理论有许多缺陷,但依然对以后的自然科学家产生了影响.他认为光是压力在以太中的传播,他从光的发射论的观点出发,用网球打在布面上的模型来计算光在两种媒质分界面上的反射、折射和全反射,从而首次在假定平行于界面的速度分量不变的条件下导出折射定

律;不过他的假定条件是错误的,他的推证得出了光由光疏媒质进入光密媒质时速度增大的错误结论.他还对人眼进行光学分析,解释了视力失常的原因是晶状体变形,设计了矫正视力的透镜.在力学上,笛卡尔发展了伽利略的运动相对性的思想,例如在《哲学原理》一书中,举出在航行中的海船上海员怀表的表轮这一类生动的例子,用以说明运动与静止需要选择参照物的道理.

笛卡尔在《哲学原理》第二章中以第一和第二自然定律的形式比较完整地第一次表述了惯性定律:只要物体开始运动,就将继续以同一速度并沿着同一直线方向运动,直到遇到某种外来原因造成的阻碍或偏离为止.这里他强调了伽利略没有明确表述的惯性运动的直线性.在这一章中,他还第一次明确地提出了动量守恒定律:物质和运动的总量永远保持不变.笛卡尔对碰撞和离心力等问题曾做过初步研究,给后来惠更斯的成功创造了条件.

天文学

笛卡尔把他的机械论观点应用到天体,发展了宇宙演化论,形成了他关于宇宙发生与构造的学说.他认为,从发展的观点来看而不只是从已有的形态来观察,对事物更易于理解.他创立了漩涡说.他认为太阳的周围有巨大的漩涡,带动着行星不断运转.物质的质点处于统一的漩涡之中,在运动中分化出土、空气和火三种元素,土形成行星,火则形成太阳和恒星.他认为天体的运动来源于惯性和某种宇宙物质漩涡对天体的压力,在各种大小不同的漩涡的中心必有某一天体,以这种假说来解释天体间的相互作用.

笛卡尔的太阳起源的以太漩涡模型第一次依靠力学而不是神学,解释了天体、太阳、行星、卫星、彗星等的形成过程,比康德的星云说早一个世纪,是17世纪中最有权威的宇宙论.

笛卡尔的天体演化说、漩涡模型和近距作用观点,正如他的整个思想体系一样,一方面以丰富的物理思想和严密的科学方法为特色,起着反对经院哲学、启发科学思维、推动当时自然科学前进的作用,对许多自然科学家的思想产生深远的影响;而另一方面又经常停留在直观和定性阶段,不是从定量的实验事实出发,因而一些具体结论往往有很多缺陷,成为后来牛顿物理学的主要对立面,导致了广泛的争论.

【学习评测】

(A)

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,在下列条件下,求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$:

(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;　　(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;　　(3)$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60^\circ$.

2. 已知向量$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$,求$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$.

3. 设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的夹角的余弦.

4. 根据下列所给条件,分别求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$:

(1)$\boldsymbol{a}=(2,-2,1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$;

(2)$\boldsymbol{a}=-8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

5. 证明向量$\boldsymbol{a}=(1,1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$,$\boldsymbol{c}=(-1,-1,2)$互相垂直.

6. 已知$M_1(1,-1,2)$,$M_2(3,3,1)$和$M_3(3,1,3)$,求与$\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位

向量.

7. 已知三点 $A(1,2,3)$,$B(3,4,5)$,$C(2,4,7)$,求 ΔABC 的面积.

(B)

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$,求 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,-2,1)$ 与 $\boldsymbol{b}=(1,2,t)$ 垂直,求 t 的值.

3. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$,$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$,问 λ 与 μ 有怎样的关系,能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直?

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$,计算:

(1)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$; (2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=36$,$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

6. 求一个垂直于由点 $P(1,-1,0)$,$Q(2,1,-1)$,$R(-1,1,2)$ 决定的平面的向量.

7*. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

8*. 已知向量 $|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$,$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$,求:

(1)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角; (2)$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 与 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 的夹角的余弦值.

9*. 设向量 $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{q}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,其中 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直. 问:

(1)k 为何值时,$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 垂直;

(2)k 为何值时,以 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 为邻边的平行四边形面积为 6.

10*. 用向量证明不等式:$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$,其中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意实数. 并指出等号成立的条件.

(C)

1. 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$,计算重力所作的功(坐标系长度单位为 m,重力方向为 z 轴负方向).

2. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处,有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 F_1 作用着;在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处,有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 F_2 作用着. 问 θ_1、θ_2、x_1、x_2、$|F_1|$、$|F_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

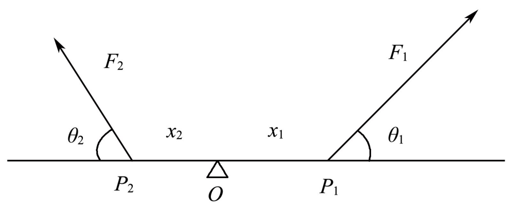

图 7-2-6